

Banach-Steinhaus et divergence des séries de Fourier

Leçons : 205, 208, 228, 246

Références :

1. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements*, Bernis, p. 218 (pour les séries de Fourier).
2. *Analyse réelle et complexe*, Walter Rudin, p. 12 et p. 131 (pour les G_δ).
3. *Oraux X-ENS*, Gianella, Analyse 3, p. 148 (pour Banach-Steinhaus, version 1).
4. *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li, p. 357 et p. 363 (pour Banach-Steinhaus version 2 et la minoration du noyau de Dirichlet), et p. 112 (pour le théorème de Baire).

Théorème 1 (Banach-Steinhaus). *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i \in I} \subset \mathcal{L}(E, F)$ une famille d'opérateurs. Alors, on a l'un des cas suivants :*

- (i) $\exists M \in]0, +\infty[\ / \ \forall i \in I, \|T_i\| \leq M$;
- (ii) *il existe D un G_δ dense de E tel que $\forall f \in D, \sup_{i \in I} \|T_i f\| = +\infty$.*

Proposition 2 (Séries de Fourier des fonctions continues). *Soit $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π -périodiques, muni de la norme infinie. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note $\forall k, \hat{f}(k)$ le coefficient de Fourier de f d'indice k , et pour $n \geq 0$ on note $S_n f$ la somme partielle de la série de Fourier de f , i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k(x), \quad \text{où } e_k(x) = e^{ikx}, \ \forall k.$$

Alors :

- (1) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, *il existe D un G_δ dense de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f \in D$,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(x_0)| = +\infty$$

(en particulier, la série de Fourier de f diverge en x_0) ;

- (2) *il existe Δ un G_δ dense de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f \in \Delta$,*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(x)| = +\infty\} \text{ est un } G_\delta \text{ dense de } (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Remarque. Le point (1) est bien plus fort qu'un simple résultat de densité : un G_δ est une notion strictement plus forte que la densité, car un ensemble dénombrable dense n'est *jamaïs* un G_δ (cf. Annexe). En particulier, l'ensemble D du point (1) n'est pas dénombrable.

Démonstration. Montrons d'abord le théorème de Banach-Steinhaus.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \{f \in E \mid \forall i \in I, \|T_i f\| \leq n\}.$$

F_n est fermé comme intersection de fermés. Posons $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On distingue alors 2 cas :

Cas 1 : $\exists N \in \mathbb{N} / \overset{\circ}{F}_N \neq \emptyset$. Donc il existe $a \in F_N$, $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset F_N$. Soit $h \in B(0, 1)$. On a alors $a + rh \in B(a, r)$, et donc $\forall i \in I, \|T_i(a + rh)\| \leq N$. Donc, $\forall i \in I, \|T_i h\| \leq \frac{2N}{r}$, et par suite, $\forall i \in I, \|T_i\| \leq \frac{2N}{r}$.

Cas 2 : $\forall n \in \mathbb{N}, \overset{\circ}{F}_n = \emptyset$. Comme E est complet, d'après le théorème de Baire, $\overset{\circ}{F} = \emptyset$, donc $\mathcal{C}F$ est dense dans E , et $\mathcal{C}F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}F_n$ est donc un G_δ dense.

Et si $f \in \mathcal{C}F$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}F_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \|T_i f\| > n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{i \in I} \|T_i f\| > n$, donc $\sup_{i \in I} \|T_i f\| = +\infty$. $\square$

Démonstration de la proposition. Montrons maintenant le point (1) de la proposition.

Étape 1 (Noyau de Dirichlet) : Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt e^{ikx} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt, \end{aligned}$$

et on a

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \not\equiv 0 [2\pi], \\ \frac{2n+1}{2\pi} & \text{si } t \equiv 0 [2\pi]. \end{cases}$$

Étape 2 (Réduction du problème) : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Posons

$$\begin{aligned} g : \mathcal{C}_{2\pi} &\longrightarrow \mathcal{C}_{2\pi} \\ f &\longmapsto g(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(x_0 - t). \end{array} \end{aligned}$$

g est linéaire, continue, bijective, d'inverse elle-même, donc g est un homéomorphisme, et en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}$,

$$S_n f(x_0) = S_n g(f)(0),$$

on voit qu'il suffit de traiter le cas $x_0 = 0$.

Étape 3 (Introduction d'une famille d'opérateurs) : Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathcal{C}_{2\pi} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto S_n f(0). \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|\varphi_n(f)| = |S_n f(0)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(-t) f(t) dt \right| \leq \|f\|_{\infty} \|D_n\|_1,$$

donc φ_n est continue, et $\|\varphi_n\| \leq \|D_n\|_1$.

Montrons qu'on a en fait égalité. Posons, pour $j > 0$, $f_j : t \mapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + 1/j}$. On a clairement $\|f_j\|_{\infty} \leq 1$, $\forall j > 0$.

- ① $\forall j > 0$, $t \mapsto D_n(t)f_j(t)$ est mesurable ;
- ② $\forall t \in [-\pi, \pi[, D_n(t)f_j(t) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} |D_n(t)|$;
- ③ $\forall t \in [-\pi, \pi[, \forall j > 0$, $|D_n(t)f_j(t)| \leq |D_n(t)|$, qui est intégrable et indépendant de j .

Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f_j(t) dt \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \|D_n\|_1.$$

De plus, on a également

$$\|\varphi_n\| \geq |\varphi_n(f_j)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f_j(t) dt \right| \geq \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f_j(t) dt}_{\xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \|D_n\|_1},$$

donc $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$.

Étape 4 (Divergence du noyau de Dirichlet) : Montrons que $\|D_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. On a

$$\begin{aligned} \|D_n\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{|\sin(t/2)|} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{|\sin(t/2)|} dt \quad (\text{par parité}) \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{t/2} dt \quad (\sin(x) \leq x) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{|\sin(u)|}{u} du \quad (u = \frac{2n+1}{2}t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)/2} \frac{|\sin(\pi t)|}{t} dt \quad (u = \pi t) \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^n \frac{|\sin(\pi t)|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{|\sin(\pi t)|}{t} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \frac{|\sin(\pi t)|}{t+k} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_0^1 |\sin(\pi t)| dt \\ &= \frac{4}{\pi^2} H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Finalement, $\|\varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, donc, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe D un G_δ dense de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $\forall f \in D$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(0)| = +\infty,$$

ce qui termine la preuve de la première partie.

Montrons la deuxième partie. Soit $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense de $[-\pi, \pi[$. D'après ci-avant, $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe D_k un G_δ dense de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $\forall f \in D_k$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(x_k)| = +\infty.$$

Posons $\Delta = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k$. Montrons que Δ est G_δ dense. $\forall k$, D_k est intersection dénombrable d'ouverts denses, donc Δ est l'intersection dénombrable d'ouverts denses, donc, par le théorème de Baire ($(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet), Δ est un G_δ dense.

Soit $f \in \Delta$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $f \in D_k$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(x_k)| = +\infty$. Donc $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(x)| = +\infty\}$ contient $\{x_k\}$, et on a

$$\Gamma = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid |S_n f(x)| > p\}}_{\text{ouvert par continuité de } S_n f} \\ \text{ouvert comme union d'ouverts}$$

est un G_δ dense, car il contient $\{x_k\}_k$, dense dans $[-\pi, \pi[$ et donc dense dans $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité de $S_n f$. $\square$

Annexes

Théorème 3. Soit X un espace de Banach et E un ensemble dénombrable dense de X . Alors E n'est pas un G_δ .

Démonstration. Notons $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ les éléments de E . Supposons par l'absurde que E soit un G_δ . Alors, on peut trouver (V_n) famille dénombrable d'ouverts denses tels que $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Posons

$$W_n = V_n \setminus \bigcup_{k=0}^n \{x_k\} \text{ (on utilise ici que } X \text{ est sans point isolé).}$$

W_n est un ouvert dense, donc, par Baire, $\bigcap_n W_n$ est dense ; or, $\bigcap_n W_n = \emptyset$, ce qui est absurde. $\square$

Proposition 4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. L'ensemble des éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier en x_0 diverge est dense.

Démonstration. Soit $f_0 \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en x_0 (cela existe). Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe p un polynôme trigonométrique tel que $\|f - p\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\left\| f - \left(p + \frac{\varepsilon}{2\|f_0\|_\infty} f_0 \right) \right\|_\infty \leq \varepsilon,$$

et la série de Fourier de $p + \frac{\varepsilon}{2\|f_0\|_\infty} f_0$ diverge en x_0 , car celle de p converge normalement (somme finie). $\square$