

Moments et fonction caractéristique de la loi Gamma

Leçons : 236, 239, 245

Référence : *Exercices de probabilités*, Christian Duhamel, p. 93, 121, 162.

Théorème 1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle suivant la loi Gamma de paramètres $a, \lambda > 0$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a.$$

Corollaire 2. Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors X admet des moments à tout ordre et on a

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{\lambda^n}.$$

Démonstration. Montrons d'abord le théorème.

Rappel : $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ donc X admet pour densité la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x). \end{aligned}$$

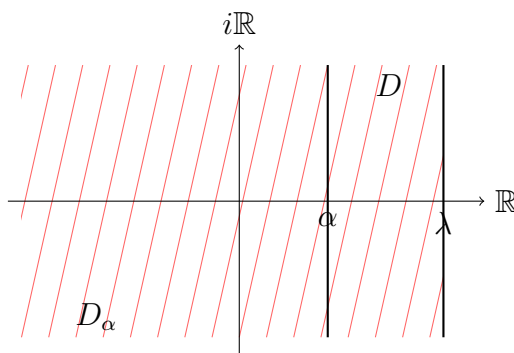
Étape 1 (calcul de $\varphi_X(t)$ et passage dans $\mathbb{C}$) : Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, par définition de φ_X et le théorème de transfert,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{itx} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx,$$

d'où

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-(\lambda - it)x} dx.$$

Posons $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < \lambda\}$ et, pour $\alpha < \lambda$, $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < \alpha\}$ (D_α est le demi-plan strictement à gauche de la droite $\operatorname{Re}(z) = \alpha$).



Posons

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[\times D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, z) &\longmapsto x^{a-1} e^{-(\lambda-z)x}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} g(x, z) dx. \end{aligned}$$

Étape 2 (Ψ est holomorphe) :

- ① $\forall z \in D, x \mapsto g(x, z)$ est mesurable ;
- ② $\forall x \in]0, +\infty[, z \mapsto g(x, z)$ est holomorphe sur D ;
- ③ Soit $\alpha \in]0, \lambda[$. $\forall z \in D_\alpha, \forall x \in]0, +\infty[$, on a

$$|g(x, z)| = |x^{a-1} e^{-(\lambda-z)x}| \leq x^{a-1} e^{-(\lambda-\operatorname{Re}(z))x} \leq x^{a-1} e^{-(\lambda-\alpha)x},$$

qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendant de z .

Donc, d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, Ψ est holomorphe sur D_α pour tout $\alpha < \lambda$, et par suite Ψ est holomorphe sur D .

Étape 3 (calcul de Ψ) : Pour $t < \lambda$, on a

$$\Psi(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-(\lambda-t)x} dx.$$

Par le changement de variable $u = (\lambda - t)x$, $du = (\lambda - t) dx$, il vient

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda - t} \right)^{a-1} e^{-u} \frac{du}{\lambda - t} \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)(\lambda - t)^a} \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^a. \end{aligned}$$

Or, $h : z \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - z} \right)^a$ est holomorphe sur D .

Donc, Ψ et h sont deux fonctions holomorphes sur D qui coïncident sur $] -\infty, \lambda[\subset D$, qui est un ensemble possédant un point d'accumulation ; donc,

$$\forall z \in D, \quad \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-(\lambda-z)x} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z} \right)^a.$$

Étape 4 (conclusion) : En remarquant que $\varphi_X(t) = \Psi(it)$, il vient alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a.$$

□

Démonstration du corollaire. φ_X est holomorphe donc infiniment dérivable, donc X admet des moments à tout ordre et

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n).$$

Par analyticité de φ_X , on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a = \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)^{-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-a)(-a-1) \cdots (-a-n+1)}{n!} \left(-\frac{it}{\lambda} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{\lambda^n n!} t^n. \end{aligned}$$

Donc, par unic   du développement en série entière, on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X^n) = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{\lambda^n}}.$$

□

Remarque. Tableau des lois usuelles : J.-Y. Ouvrard, *Probabilités*, tome 2, p. 27.