

Limite de variables aléatoires gaussiennes

Leçons : 223, 262

Référence : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Bernis, p. 193.

Théorème 1. Soit $(m_n) \subset \mathbb{R}$ et $(\sigma_n^2) \subset \mathbb{R}_+$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2),$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \text{ où } X \text{ est une variable aléatoire réelle.}$$

Alors, (m_n) converge vers un réel m , (σ_n^2) converge vers un réel positif σ^2 , et $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Si de plus $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$, alors, pour tout réel $r \geq 1$, $X_n \rightarrow X$ dans L^r .

Démonstration. On adopte la convention $\mathcal{N}(m, 0) = \delta_m$.

Étape 1 (convergence de (σ_n^2)) : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{itm_n} e^{-\sigma_n^2 t^2 / 2}.$$

Comme $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$, le théorème de Paul-Lévy donne $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par continuité du module, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-\sigma_n^2 t^2 / 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |\varphi_X(t)|.$$

φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_X(0) = 1$, donc il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t_0)| \in]0, 1]$, et, par continuité du logarithme,

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{2}{t_0^2} \ln(|\varphi_X(t_0)|) =: \sigma^2 \geq 0.$$

Étape 2 (convergence de (m_n)) : Montrons que (m_n) admet une unique valeur d'adhérence.

(m_n) est bornée : Supposons par l'absurde que (m_n) n'est pas bornée ; sans perte de généralité, on peut supposer que (m_n) n'est pas majorée. Il existe alors $(m_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (m_n) telle que $m_{\varphi(n)} \rightarrow +\infty$.

Soit $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{P}(X = \alpha) = 0$ (un point de continuité de F_X). Comme $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$, on a $F_{X_{\varphi(n)}}(\alpha) \rightarrow F_X(\alpha)$, donc

$$\mathbb{P}(X_{\varphi(n)} > \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(X > \alpha).$$

Pour n assez grand, $m_{\varphi(n)} \geq \alpha$, et par suite

$$\mathbb{P}(X_{\varphi(n)} > \alpha) \geq \mathbb{P}(X_{\varphi(n)} > m_{\varphi(n)}) = \frac{1}{2} \quad (\text{par symétrie de la loi } \mathcal{N}(m_{\varphi(n)}, \sigma_{\varphi(n)}^2)),$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\mathbb{P}(X > \alpha) \geq \frac{1}{2}$.

Le nombre d'atomes de la loi de X étant au plus dénombrable, il existe (α_n) une suite croissante de réels divergeant vers $+\infty$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = \alpha_n) = 0$. Par continuité monotone, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X > \alpha_n\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > \alpha_n) \geq \frac{1}{2},$$

or, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X > \alpha_n\} = \{X = +\infty\}$, et X est à valeurs réelles, ce qui est absurde. Ainsi, (m_n) est bornée.

Unicité de la valeur d'adhérence : D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, (m_n) admet au moins une valeur d'adhérence. Supposons par l'absurde que (m_n) admet deux valeurs d'adhérence distinctes m et m' . On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{itm_n} = e^{\sigma_n^2 t^2 / 2} \varphi_{X_n}(t).$$

Si $(m_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de (m_n) convergeant vers m et $(m_{\varphi'(n)})$ une sous-suite de (m_n) convergeant vers m' , alors, comme $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{itm} &= e^{\sigma^2 t^2 / 2} \varphi_X(t), \\ e^{itm'} &= e^{\sigma^2 t^2 / 2} \varphi_X(t), \end{aligned}$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, e^{it(m-m')} = 1$, et en particulier, pour $t = \frac{\pi}{2(m-m')}$, on obtient $i = 1$, ce qui est faux.

Donc (m_n) admet une unique valeur d'adhérence, donc (m_n) converge vers un réel m .

Étape 3 : Il vient donc que $\varphi_X(t) = e^{itm} e^{-\sigma^2 t^2 / 2}$, donc $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (avec la convention $\mathcal{N}(\overline{m}, 0) = \delta_m$).

Montrons maintenant la seconde partie du théorème.

Lemme 2. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $q \in \mathbb{N}^*$ un entier pair.

(i) Si $\sigma^2 = 0$, alors $\mathbb{E}(Y^q) = 0$.

(ii) Si $\sigma^2 > 0$, alors $\mathbb{E}(Y^q) = c_q \sigma^q$ où $c_q \in \mathbb{R}_+^*$ est indépendant de σ .

Démonstration du lemme. Si $\sigma^2 = 0$ alors $Y \sim \delta_0$ et donc $\mathbb{E}(Y^q) = 0^q = 0$.

Supposons donc $\sigma^2 > 0$. Montrons le résultat par récurrence sur l'entier pair q .

Rang $q = 2$: On a

$$\mathbb{E}(Y^2) = \text{Var}(Y) + \underbrace{\mathbb{E}(Y)^2}_{=0} = \sigma^2,$$

donc le résultat est vrai au rang 2.

Soit $q > 2$ un entier pair. Par définition de l'espérance, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^{q+2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^{q+2} e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (q+1) \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^q e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy \quad (\text{par I.P.P., le crochet étant nul}) \\ &= (q+1) \sigma^2 \mathbb{E}(Y^q) \\ &= c_{q+2} \sigma^{q+2}, \quad \text{où } c_{q+2} = c_q (q+1) \text{ (hypothèse de récurrence),} \end{aligned}$$

donc le résultat est vrai au rang $q+2$.

Par le principe de récurrence, on a bien montré que $\forall q \in \mathbb{N}^*$ pair, $\mathbb{E}(Y^q) = c_q \sigma^q$. *CQFD*

L'hypothèse $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ suggère l'utilisation du théorème de convergence L^p de Vitali.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - m_n$, et soit $p \geq 1$.

Observation : On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$,

$$|X_n|^q = |Y_n + m_n|^q \leq 2^q (|Y_n|^q + |m_n|^q).$$

Pour appliquer le théorème de Vitali, il faut vérifier qu'on est dans son cadre.

Les X_n admettent un moment d'ordre $2p$: Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_n|^{2p}) &\leq 2^{2p} \left(\underbrace{\mathbb{E}(|Y_n|^{2p})}_{\leq c_{2p} \sigma_n^{2p}} + |m_n|^{2p} \right) \\ &\leq 2^{2p} (c_{2p} \sigma_n^{2p} + |m_n|^{2p}). \end{aligned}$$

Or, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ donc $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$, donc, d'après la première partie du théorème, (σ_n^2) et (m_n) convergent, donc sont bornées, et alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^{2p}) < +\infty.$$

Équi-intégrabilité de $(|X_n|^p)_n$: Montrons que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p \mathbf{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}}) = 0.$$

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|X_n|^p \mathbf{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}} \leq |X_n|^p \cdot \frac{|X_n|^p}{a} \mathbf{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}} = \frac{1}{a} |X_n|^{2p} \mathbf{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}},$$

donc,

$$\mathbb{E}(|X_n|^p \mathbf{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}}) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(|X_n|^{2p} \mathbf{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}}) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(|X_n|^{2p}).$$

Donc, par passage au sup en n ,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p \mathbf{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}}) \leq \frac{1}{a} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^{2p}) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Donc, $(|X_n|^p)_n$ est équi-intégrable, et donc, d'après le théorème de Vitali, $X_n \rightarrow X$ dans L^p .

p étant quelconque, on obtient le résultat pour tout $r \in [1, +\infty[$ par inclusion des espaces $L^p \subset L^r$ pour $p \geq r$. $\square$

Annexes

1. **Sens réciproque** : Si $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ et $m_n \rightarrow m$, $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$, alors (X_n) converge en loi vers $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, d'après le théorème de Paul-Lévy.
2. **Contre-exemple lorsque X n'est pas réelle** : $X_n \sim \mathcal{N}(n, (-1)^n + 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \delta_{+\infty}$, mais $n \rightarrow +\infty$.