

Inexistence d'une probabilité raisonnable sur $\mathbb{N}$

Leçons : 266

Références :

1. *Mathématiques pour l'agrégation externe : Probabilités*, W. Appel, p. 56-59.
2. *An introduction to the theory of numbers*, G.H. Hardy & E.M. Wright, p. 20.

Lemme 1 (Borel-Cantelli). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'événements.*

(i) *Si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A_n \text{ I.S.}) = 0$.*

(ii) *Si la famille (A_n) est indépendante et si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(A_n \text{ I.S.}) = 1$.*

Démonstration. (i) Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Montrons que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 0$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq N} A_k\right) \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

comme reste d'une série convergente.

(ii) Supposons les (A_n) indépendantes et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.

Pour $0 \leq n \leq N$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right) &= \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k^c) \quad (\text{les } (A_k^c) \text{ sont indépendants car les } (A_n) \text{ le sont}) \\ &= \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \prod_{k=n}^N e^{-\mathbb{P}(A_k)} \quad (\text{par convexité de } t \mapsto e^{-t}) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{par divergence de } \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)). \end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0$ pour tout n , donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0,$$

donc, par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_n \text{ I.S.}) = 1.$$

CQFD

Théorème 2 (Inexistence d'une probabilité raisonnable sur $\mathbb{N}$). *Il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k}.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k}$.

Notons $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = p_n \mathbb{N}$.

Indépendance des (A_n) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \dots, i_n$ des indices distincts. Comme $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$ sont deux à deux premiers entre eux, le lemme de Gauss assure qu'un entier est multiple de chacun des p_{i_k} si, et seulement si, il est multiple de leur produit $\prod_{k=1}^n p_{i_k}$; on a donc

$$\bigcap_{k=1}^n A_{i_k} = \left(\prod_{k=1}^n p_{i_k}\right) \mathbb{N}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\prod_{k=1}^n p_{i_k}\right) \mathbb{N}\right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n p_{i_k}} \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{p_{i_k}} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_{i_k}). \end{aligned}$$

Donc les (A_n) sont indépendantes.

Divergence de $\sum \frac{1}{p_n}$: Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

Supposons par l'absurde que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < +\infty$. Alors $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, donc il existe $j \in \mathbb{N}$

tel que $\sum_{n=j+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}$.

Pour $x > 0$, posons $N(x) = \#\{n \leq x \mid \forall k \geq j, p_k \nmid n\}$.

Si n appartient à cet ensemble, on peut l'écrire $n = n_1^2 \prod_{k=1}^j p_k^{b_k}$ avec $b_k \in \{0, 1\}$. Il y a 2 choix possibles à chaque fois pour b_k , et $n_1 < \sqrt{x}$, donc

$$\boxed{N(x) \leq 2^j \sqrt{x}.} \quad (1)$$

De plus, $x - N(x)$ est le nombre d'entiers $n \leq x$ divisibles par au moins un p_k pour $k \geq j+1$. Comme il y a au plus x/p entiers $\leq x$ divisibles par un nombre premier p , on obtient

$$\begin{aligned} x - N(x) &\leq \sum_{k=j+1}^{+\infty} \frac{x}{p_k} \\ &< \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

D'où $\frac{x}{2} < N(x) \leq \sqrt{x} 2^j$, d'où $x < 2^{2(j+1)}$.

En choisissant $x \geq 2^{2(j+1)}$ au départ, on obtient une contradiction. Donc $\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$ diverge.

D'après le second lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(A_n \text{ I.S.}) = 1$, c'est-à-dire que presque tout entier admet une infinité de diviseurs premiers, ce qui est absurde car $(A_n \text{ I.S.}) = \emptyset$. $\square$