

Moments d'une v.a. et régularité de la fonction caractéristique

Leçons : 234

Référence : *Probabilités*, tome 2, J.-Y. Ouyard (p. 208).

Contre-exemple : Appel, p. 311 (voir p. 263).

Théorème 1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Soit φ_X sa fonction caractéristique.

(i) Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\Omega} X^k e^{itX} dP,$$

et en particulier

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k).$$

(ii) Inversement, si φ_X est $2n$ fois dérivable en 0 (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2n$, et ils sont donnés par

$$\mathbb{E}(X^k) = (-1)^k i^k \varphi_X^{(k)}(0), \quad k \leq 2n.$$

Démonstration. (i) Rappelons que $\varphi_X(t) = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} dP(\omega)$. Il est clair que φ_X est bien définie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que X admet un moment d'ordre n . Montrons que φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$.

On pose $f(t, \omega) = e^{itX(\omega)}$ et on vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégral (version $\mathcal{C}^n$) :

① $\forall t \in \mathbb{R}, \omega \mapsto e^{itX(\omega)}$ est intégrable sur Ω ;

② $\forall \omega \in \Omega, t \mapsto e^{itX(\omega)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}((t, \omega) \mapsto e^{itX(\omega)})(t, \omega) = i^k X(\omega)^k e^{itX(\omega)};$$

③ $\forall \omega \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(\omega, t) \right| = |X|^n(\omega),$$

qui est intégrable par hypothèse.

Donc, par le théorème de dérivation sous le signe intégral (classe $\mathcal{C}^n$), on a : φ_X est $\mathcal{C}^n$ et, pour tout $1 \leq k \leq n$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\Omega} X(\omega)^k e^{itX(\omega)} dP(\omega).$$

(ii) Inversement, procédons par récurrence sur n .

Supposons φ_X deux fois dérivable en 0. D'après la formule de Taylor-Young en 0, on a

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \underbrace{\varphi_X(0)}_{=1} + t\varphi'_X(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''_X(0) + o(t^2), \\ \varphi_X(-t) &= \varphi_X(0) - t\varphi'_X(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''_X(0) + o(t^2).\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi''_X(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) &= \int_{\Omega} (e^{itX(\omega)} + e^{-itX(\omega)}) dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} 2 \cos(tX(\omega)) dP(\omega) = 2 \mathbb{E}(\cos(tX)).\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2} &= \frac{2 \mathbb{E}(\cos(tX)) - 2}{t^2} \\ &= 2 \mathbb{E}\left(\frac{\cos(tX) - 1}{t^2}\right) = -2 \mathbb{E}\left(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1 - \cos(tX)}{t^2} dP = -\frac{\varphi''_X(0)}{2}.$$

Soit maintenant (t_n) une suite de réels non nuls qui converge vers 0. Comme $\frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2} \geq 0$, le lemme de Fatou donne

$$\begin{aligned}-\frac{\varphi''_X(0)}{2} &= 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2} dP \\ &\geq \int_{\Omega} 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2} dP \\ &= \int_{\Omega} X^2 dP = \mathbb{E}(X^2).\end{aligned}$$

Donc X admet un moment d'ordre 2, et par le cas (i) on obtient la formule.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supposons avoir montré l'existence de tous les moments jusqu'à l'ordre $2(n-1)$. Montrons que le moment d'ordre $2n$ existe.

X admet un moment d'ordre $2(n-1)$, donc par (i), φ_X est de classe $\mathcal{C}^{2(n-1)}$ et on a

$$\varphi_X^{(2(n-1))}(t) = (-1)^{n-1} \int_{\Omega} X^{2(n-1)} e^{itX} dP.$$

Et par suite, on a

$$\varphi_X^{(2(n-1))}(t) + \varphi_X^{(2(n-1))}(-t) = (-1)^{n-1} 2 \mathbb{E}(X^{2(n-1)} \cos(tX)).$$

Par hypothèse, $\varphi_X^{(2(n-1))}$ est deux fois dérivable en 0, donc par Taylor,

$$\varphi_X^{(2n)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_X^{(2(n-1))}(t) + \varphi_X^{(2(n-1))}(-t) - 2\varphi_X^{(2(n-1))}(0)}{t^2},$$

et on a, par (i), que

$$\varphi_X^{(2(n-1))}(0) = (-1)^{n-1} \mathbb{E}(X^{2(n-1)}).$$

Donc,

$$\frac{\varphi_X^{(2(n-1))}(t) + \varphi_X^{(2(n-1))}(-t) - 2\varphi_X^{(2(n-1))}(0)}{t^2} = 2(-1)^n \mathbb{E}\left(X^{2(n-1)} \frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right).$$

Donc,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} X^{2(n-1)} \frac{1 - \cos(tX)}{t^2} dP = \frac{(-1)^n}{2} \varphi_X^{(2n)}(0).$$

Par le lemme de Fatou, si $(t_n) \subset \mathbb{R}^*$ avec $t_n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} (-1)^n \varphi_X^{(2n)}(0) &= 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X^{2(n-1)} \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2} dP \\ &\geq \int_{\Omega} 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} X^{2(n-1)} \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2} dP \\ &= \int_{\Omega} X^{2n} dP = \mathbb{E}(X^{2n}). \end{aligned}$$

Donc X admet un moment d'ordre $2n$, ce qui achève la récurrence, et par (i) on obtient la formule annoncée. $\square$

Remarque. Le sens direct (i) donne en fait un résultat plus fort : dès que X admet un moment d'ordre n (pair *ou* impair), φ_X est $\mathcal{C}^n$. En revanche, la réciproque (ii) ne fonctionne qu'avec des dérivées d'ordre *pair* en 0 : il existe des variables aléatoires pour lesquelles φ_X est dérivable en 0 à un ordre impair sans que le moment correspondant existe (voir le contre-exemple d'Appel, p. 311, cité en référence).