

I. Formules de Taylor en dimension 1.

A) Formule de Taylor Lagrange [RouR], [Gou]

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$.

th 1: (Formule de Taylor Lagrange). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Exemple 2: $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Rq: Le théorème précédent devient faux si f est à valeur dans un espace normé E quelconque.

th 3: (Inégalité de Taylor Lagrange). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. $f: [a, b] \rightarrow E$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ et il existe $M > 0$ tel que $\forall s \in]a, b[, \|f^{(n+1)}(s)\| \leq M$. Alors,

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k\| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple 4: $\forall x > 0, \sin(x) \leq x$.

B) Formule de Taylor avec reste intégrale.

Soit E un espace de Banach, soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

th 5: (Formule de Taylor avec reste intégrale) Soit $f: [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

$$\text{Alors, } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt.$$

Ex: Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $f, f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

C) Formule de Taylor-Young. [Gou] p.

Soit $\frac{1}{n} \in \mathbb{N}$. $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit E un espace normé et

th 6: (Formule de Taylor-Young) Soit $f: I \rightarrow E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $n+1$ fois dérivable en $a \in I$.

Alors, mais
$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^{n+1}).$$

II. Formules de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables. [Rou] p. 936

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $h \geq 0$.

th 7: (Formule de Taylor-Young)

Si f est k -fois différentiable en un point $a \in U$, alors on a:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^k \frac{D^i f(a)}{i!} (h)^i + o(\|h\|^k)$$

th 8: (Formules de Taylor avec reste intégrale). Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U et si $a \in U$ et $[a, a+h] \subset U$, alors,

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^k \frac{D^i f(a)}{i!} (h)^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th) (h)^{k+1} dt$$

Corollaire 3: (Taylor-Lagrange) Sous les mêmes hypothèses que précédemment, si K est un fermé compact convexe, il existe $C > 0$ tel que pour $a \in K$ et $a+h \in K$,

$$\|f(a+h) - \sum_{i=0}^k \frac{D^i f(a)}{i!} (h)^i\| \leq C \|h\|^{k+1}.$$

III. Applications.

A) Développements limités et développements asymptotiques. [Rou] + [Gou].

Def 10: Soit I un intervalle et $k \in \mathbb{N}$ ou ∞ . Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$ si il existe un polynôme P avec $\deg(P) \leq n$ tel que $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$.

Propositi^o 13: Si f admet un développement limité en $a \in \mathbb{I}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, ce dernier est alors unique.

Exemple 12: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k + o(x^n)$.

Th^é 13: (Taylor-Young): Si f est dérivable n fois en $a \in \mathbb{I}$, alors f admet le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

$\mathbb{Z}$. f peut admettre un développement limité à l'ordre n sans être n fois dérivable.

Centre exemple 14: La fonction $x \mapsto \begin{cases} 1+x+x^2+x^3 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

On a cependant le théorème suivant:

Th^é 15: $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{I}$ si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .
Le théorème 13 peut être utilisé pour obtenir les développements limités des fonctions usuelles.

Exemple 16: ① $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

$$\textcircled{2} \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+2}).$$

$$\textcircled{3} \sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+3}).$$

On peut utiliser les développements limités dans l'étude de certaines séries divergentes.

Th^é 17: Soit $(u_n), (v_n) \subset \mathbb{R}_+$ telles que $u_n \sim v_n$.
Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge et on a:
 $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Application 18: On a $f_n(1+x) = x + o(x)$ donc $f_n(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et on obtient alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\frac{1}{n})$.

Application 19: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

B) Fonctions développables en série entière [E L A M].

Propositi^o 20: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est développable en série entière en x_0 , alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et se développe en série entière de f en x_0 est:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Centre exemple 21: $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2}) \frac{1}{x!}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Proposition 22: Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $J-a, a[$ avec $a > 0$, et si il existe $R > 0$ et $M > 0$ tels que $\forall x \in J-a, a[, \forall n \in \mathbb{N}$,
 $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M n!}{R^n}$, alors f est développable en série entière en 0 sur $J-M \ln(a, R), M \ln(a, R)[$.

C) Application en calcul différentiel [R O U].

Lemme 23: Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. et $\varphi: M \mapsto {}^t M A_0 M$.
Alors, il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi: V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$.
de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\forall A \in V, A = {}^t \varphi(A) A_0 \varphi(A)$.

Lemme 24 (de Morse): Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. Supposons que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique $D^2 f(0)$ soit non dégénérée et $\text{sign}(p, n-p)$.

Alors il existe φ un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de l'origine tel que $\varphi(0) = 0$ et tel que

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x)^2 - \sum_{k=p+1}^n \varphi_k(x)^2. \quad \text{DEV 1}$$

Appl° 25: Soit $\varphi(x, y) = f(x, y)$ une surface avec $f \in \mathcal{C}^3$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$. Si $D^2 f(a)$ est non dégénérée alors:

- ① Si $D^2 f(a)$ est signature $(+, +)$, alors S est au dessus de (P_a) .
- ② Si $D^2 f(a)$ est $(-, -)$, S est en dessous de (P_a) .
- ③ Si $D^2 f(a)$ est $(+, -)$, alors (P_a) traverse S .

D) Application en probabilités. [DEV 2]

Proposit° 26: Soit X une variable aléatoire réelle et φ_X sa fonction caractéristique. Alors

(i) Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^+$, φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et par tout entiers $k \leq n$, on a:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k \exp(itx) dP.$$

et en particulier $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$. (*)

(ii) Si φ_X est $2n$ fois dérivable en 0 ($n \geq 1$) alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2n$ et ils sont donnés par (*).

DEV 2 -

Proposit° 27: Soit X une variable aléatoire réelle et φ_X sa fonction caractéristique. Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^+$, alors φ_X admet un développement de Taylor en 0 avec reste intégrale qui s'écrit sous la forme, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + \frac{(it)^n}{(n-1)!} E\left(X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(itux) du\right)$$

et ainsi:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + \frac{(it)^n}{n!} E_n(t)$$

Th 27: (Lévy) Soit (X_n) une suite de var. aléatoires réelles avec fonctions caractéristiques φ_{X_n} . Alors (X_n) converge en loi vers une var. aléatoire X si, et seulement si, (φ_{X_n}) converge simplement vers φ_X .

Th 29: (Central Limit). Soit (X_n) une suite de var. aléatoires réelles, indépendantes et de même loi et admettant un moment d'ordre 2. Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j - E(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V(X_1)).$$