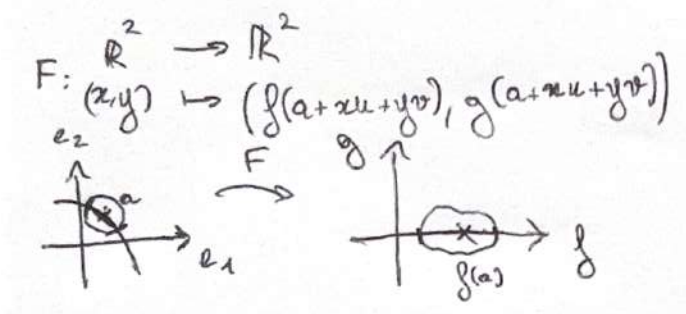
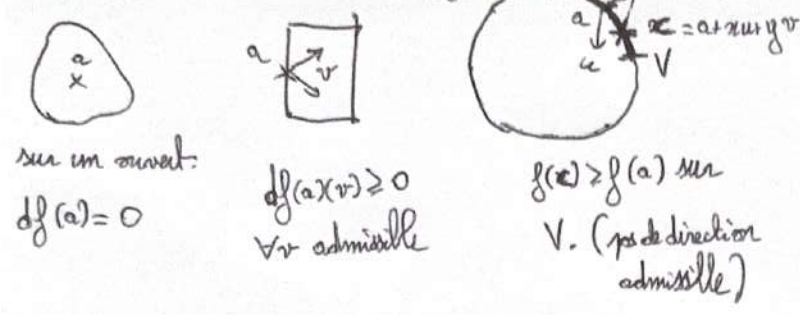


a minimum de f :



HL (extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ avec $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. On note $M = \{x \in U : g_i(x) = 0\}$.

Si $a \in M$ est un minimum de f sur M et que $(dg_i(a))$ libre, il existe $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$df(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i dg_i(a)$$

démo: Comme $(dg_i(a))$ libre, $\exists (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ tq $\forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket : dg_i(a)(v_j) = \delta_{ij}$.

• Soit $v \in \mathbb{R}^n$, on a $R > 0$ tq $\forall (x_1, \dots, x_k) \in B(0, R) : a + xv + \sum_{i=1}^k x_i v_i \in U$.

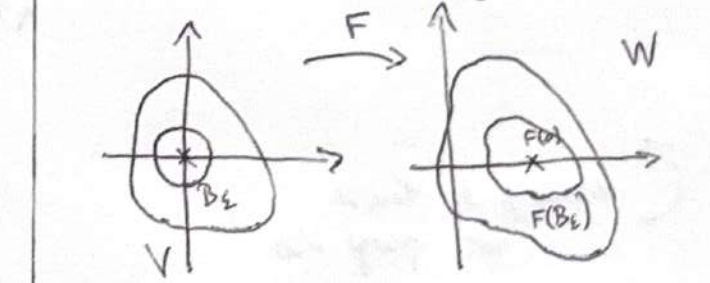
Alors, $B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$
 $F: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (f(a+xv + \sum x_i v_i), g_1(a+xv + \sum x_i v_i), \dots, g_k(a+xv + \sum x_i v_i))$

$F \in \mathcal{C}^1$, $F(0) = (f(a), 0, \dots, 0)$ et

$$DF(0) = \begin{pmatrix} df(a)(v) & df(a)(v_1) & \dots & df(a)(v_k) \\ dg_1(a)(v) & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ dg_k(a)(v) & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

• Mg $\det(DF(0)) = 0$ (dérivée par la 1^{ère} colonne par colonne).

Si $DF(0) \in GL_{k+1}(\mathbb{R})$, par TLL, on a V, W voisinages ouverts de 0, $F(0) \in V$ tq $F: V \rightarrow W$ $\mathcal{C}^1$ difféo.



En particulier, $\forall \varepsilon \in]0, R[:$

$\exists (x_1, \dots, x_k) \in B(0, \varepsilon)$ tq $f(a+xv + \sum x_i v_i) < f(a)$
 $g_i(a+xv + \sum x_i v_i) = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket :$
 $a+xv + \sum x_i v_i \in M$.
 a n'est donc pas un min de f sur M :
 absurde on a $\det(DF(0)) = 0$.

• En développant par rapport à la première colonne, on a donc

$0 = df(a)(v) \times 1 + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \Delta_{i,1} \times dg_i(a)(v)$
 où $\Delta_{i,1}$ est le mineur $i+1, 1$ (indépendant de v)
 On note $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket : \lambda_i = (-1)^{i+1} \Delta_{i,1}$
 et donc

$\forall v \in \mathbb{R}^n :$

$$df(a)(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i dg_i(a)(v)$$

Lemme: Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in (E^*)^k$ libre. $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $x \mapsto (\varphi_i(x))$ est surjective.

démon: Soit $y \in \text{Im}(\phi)^\perp$:

$$\forall x \in E: \sum_{i=1}^k y_i \varphi_i(x) = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^k y_i \varphi_i = 0.$$

Par liberté, $y = 0$, donc $\text{Im}(\phi)^\perp = \{0\}$, et donc $\text{Im}(\phi) = \mathbb{R}^k$:

$\boxed{\phi \text{ surjective}}$