

Prop (Espace de Bergman).

$B(D) := L^2(D) \cap \mathcal{H}(D)$ est un espace de Hilbert, de b.h.

$$e_n: z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$$

Prop $B(D)$ est un ar, base de $\mathcal{H}(D)$

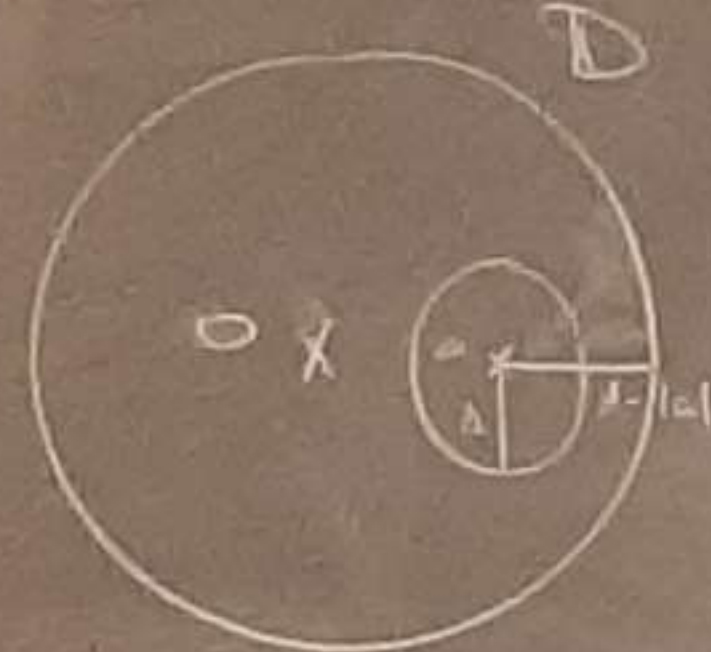
$$\langle f, g \rangle = \iint_D f(z) \overline{g(z)} dA(z)$$

Remarque Soit $K \subset D$ compact. La topologie de la C.V.U. sur K est la même que la topologie L^2 .

Pour tout $a \in K$,

$$\overline{D(a)} \subset D$$

$$r < d(a, S) = 1 - |a| \leq \frac{1}{2} d(K, S)$$



$$\text{Alors } f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\theta$$

Pour toute

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a)} f(z) dz &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho f(a + \rho e^{i\theta}) d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho f(a + \rho e^{i\theta}) d\rho \right) d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a)} f(z) dz = f(a)$$

$$\text{Alors } \|f\|_{\infty, K} \leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\iint_{D(a)} |f(z)|^2 dz \right)^{1/2} \left(\iint_{D(a)} 1 dz \right)^{1/2}$$

$$H(a) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_2$$

$$\text{d'où pour } r \rightarrow 1-|a| \quad \|f\|_{\infty, K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} (1-|a|)} \|f\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, S)} \|f\|_2$$

$$\text{pour } \|f\|_{\infty, K} \leq C \|f\|_2$$

Montrons que $B(D)$ est complet.

Par R.T., $\mathcal{H}(D)$ est complet; $\mathcal{H}(D)$ est fermé dans $L^2(D)$.

Soit $(f_n) \in B(D)^{\mathbb{N}}$, $f_n \xrightarrow{L^2} g \in \mathcal{H}(D)$.

Par le lemme, (f_n) est de Cauchy dans $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty, K})$ pour tout $K \subset D$.

Complet $C(K, \mathbb{C})$ donc $f_n \xrightarrow{\infty} f_K$ et f_K est la limite ponctuelle.

Par le lemme, $f_K \in \mathcal{H}(D)$ pour tout $K \subset D$.

Reste à voir que $f = g$ p.p.

On a

$$\forall K \quad \|f_n - f_K\|_{\infty, K} \leq \|f_n - g\|_{\infty, K} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{donc } f_n \xrightarrow{L^2} g_K \text{ pour } f_K = g_K \text{ p.p. } \forall K \subset D$$

Base hilbertienne $e_n: z \mapsto z^n$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \iint_D z^n \overline{z^m} dA(z)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^n e^{in\theta} \overline{r^m e^{im\theta}} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{n+m+1} dr \right) e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{n+m+2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} \text{ car } \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0 \text{ si } k \neq 0$$

Montrons que (e_n) est totale.

Soit $f \in (B(D))^{\perp}$. Alors $\langle f, e_n \rangle = 0$.

$$\text{Ici } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ et } \langle f, e_n \rangle = 0$$

$$\text{donc } \langle f, e_n \rangle = a_n = 0 \text{ pour tout } n$$

$$\text{donc } f = 0$$

MAIS l'orthogonalité dans $\langle f, e_n \rangle$ doit être justifiée.

Pour $z \in D$, $f \in B(D)$ on a

$$\iint_D f(z) \overline{z^n} dA(z) = \iint_D \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \overline{z^n} dA(z)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \iint_D z^m \overline{z^n} dA(z)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \langle e_m, e_n \rangle = a_n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{m+n+1} dr \right) e^{i(m-n)\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \delta_{m,n}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \delta_{m,n}$$

$$\text{Pour } CVD, \quad \langle f, e_n \rangle = a_n$$

$$\left(\begin{array}{l} - \text{on voit} \\ - \text{d'où l'on voit} \end{array} \right)$$

$$\text{donc } a_n = 0 \text{ pour tout } n$$

Appliquons $z \mapsto \overline{z}$ à $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n$$

$$\text{Pour } K \subset D, \quad \overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n$$

$$\text{Mais } K(z) = \overline{K(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n$$

$$\text{D'où } \overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z}^n$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{m+n+1} dr \right) e^{i(m-n)\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \delta_{m,n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \delta_{m,n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \delta_{m,n}$$

Prop (Espace de Bergman)

$B(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, de b. l.

$$e_n: z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$$

Rq $B(\mathbb{D})$ est un es, muni des p.s de $L^2(\mathbb{D})$

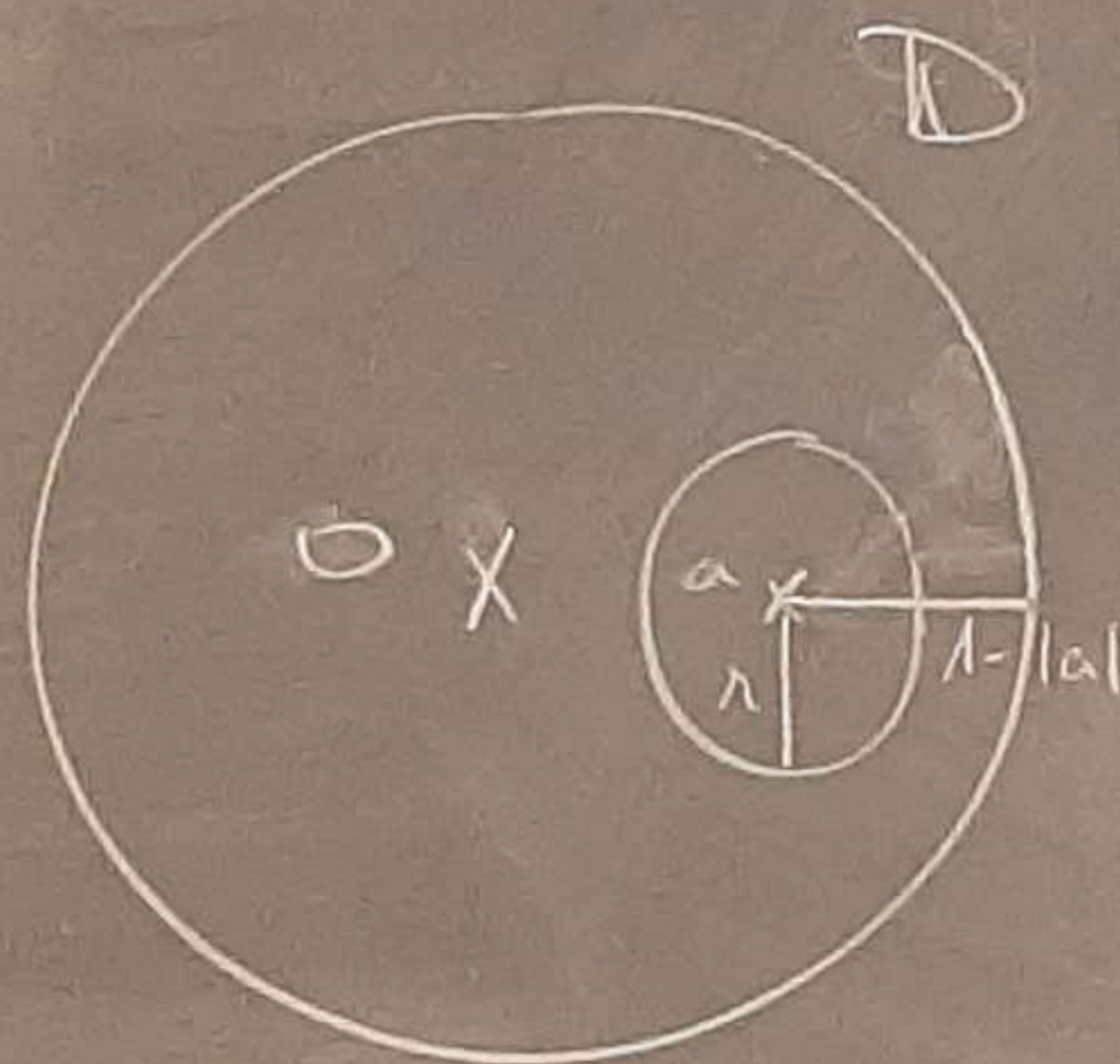
$$\langle f, g \rangle = \iint_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} d\lambda(z)$$

Lemme Soit $K \subset \mathbb{D}$ compact. La topologie de la C.V.U. sur K est moins fine que la topologie L^2 .

Preuve Soit $a \in K$,

$$\overline{D(a, r)} \subset \mathbb{D},$$

$$r < d(a, S^1) = 1 - |a| \leq \underbrace{d(K, S^1)}_{\geq d(K, S^1)}$$



$$\text{Alors } f(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) r d\theta$$

Par suite :

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a, r)} f(z) d\lambda(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi \rho f(a) d\rho$$

$$= \frac{2\pi}{\pi r^2} f(a) \frac{r^2}{2}$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a, r)} 1 d\lambda(z) = f(a)$$

$$\text{Alors : } |f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \sqrt{\iint_{D(a, r)} |f(z)|^2 d\lambda(z)} \sqrt{\iint_{D(a, r)} 1 d\lambda(z)} \leq \|f\|_2 \sqrt{\pi r^2} = \sqrt{\pi} r \|f\|_2$$

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_2$$

$$\text{donc pour } r \rightarrow 1 - |a| \quad |f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}(1 - |a|)} \|f\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, S^1)} \|f\|_2 =: C$$

$$\text{pour } \|f\|_{\infty, K} \leq C \|f\|_2$$

Montrons que $B(\mathbb{D})$ est complet.

Par R-F, $L^2(\mathbb{D})$ est complet ; mp $B(\mathbb{D})$ est fermé dans L^2 .

$$\text{Soit } (f_n) \in B(\mathbb{D})^{\mathbb{N}}, \quad f_n \xrightarrow{L^2} g \in L^2(\mathbb{D})$$

Par le lemme, (f_n) est de Cauchy dans $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty, K})$ pour tout K_c dans $\mathbb{D}$, d'où $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f_K$ et par unicité de la limite ponctuelle, $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ par Weierstrass.

Reste à voir que $f = g$ p.p.

On a :

$$\forall K \quad \|f_n - f_K\|_{\infty, K} \leq \|f_n - f\|_{\infty, K} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{donc } f_n \xrightarrow{L^2} g_K, \text{ pour } f_K = g_K \text{ p.p. } \forall K \subset \mathbb{D}$$

$$\text{alors } d(c, c') \leq 2r < d(c)$$

est complet
 complet; un $\mathbb{D}$ est fermé
 dans $\mathbb{C}^2$
 $f_n \xrightarrow{L^2} g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$
 de Cauchy dans
 tout K_c dans $\mathbb{D}$,

et par suite de la
 (VU) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$
 par unicité

TP-

$$\|f\|_K \|g\|_K = \|fg\|_K \rightarrow 0$$

$$f|_K = g|_K \quad \forall K \subset \mathbb{D}$$

Base hilbertienne $e_n \mapsto z^n$

$$\begin{aligned} \langle e_m, e_n \rangle &= \int_{\mathbb{D}} z^m \overline{z^n} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^m e^{im\theta} \overline{r^n e^{in\theta}} r dr d\theta \\ &= \left[\frac{r^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{m+n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Par conséquent $(e_n)_n$ est totale.

Soit $f \in (\text{Vect}(e_n))^\perp$. Alors $f=0$.

$$\text{Idee } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ et } \langle f, e_n \rangle = 0 \quad \forall n$$

$$\text{d'où } \langle f, e_n \rangle = a_n = 0$$

d'où $f=0$

MAIS l'intégration dans $\langle f, e_n \rangle$ doit
 être justifiée
 Pour $z < 1$, f VN sur $\mathbb{D}(0, r)$.
 Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}(0, r)} f(z) \overline{e_n(z)} dA &= \int_{\mathbb{D}(0, r)} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m \overline{z^n} dA \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \int_{\mathbb{D}(0, r)} z^m \overline{z^n} dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{r^{m+n+2}}{m+n+2} \delta_{m,n} \\ &= \frac{r^{2n+2}}{2n+2} a_n \xrightarrow{r \rightarrow 1} a_n \end{aligned}$$

$$\text{Par CVD, } \int_{\mathbb{D}(0, r)} f(z) \overline{e_n(z)} dA \xrightarrow{r \rightarrow 1} \langle f, e_n \rangle$$

d'où $a_n = 0 \quad \forall n$.

Appliquons $z \mapsto f(z)$
 $\in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ d'où

$$\begin{aligned} \text{(Riesz)} \quad h_z &= \langle \cdot, h_z \rangle \text{ i.e.} \\ \forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \quad f(z) &= \langle f, h_z \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Prenons } K: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } K(z, w) &= \overline{h_z(w)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle h_z, e_n \rangle \overline{e_n(w)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, h_z \rangle \overline{e_n(w)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{e_n(z)} \overline{e_n(w)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } K(z, w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{e_n(z)} \overline{e_n(w)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n} \left(\overline{z} \overline{w} \right)^n \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \overline{z}^n \overline{w}^n \quad |z=w \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{z}^n \right)' \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \frac{1}{1-\overline{z}} = \frac{1}{\pi (1-\overline{z})^2}$$