

1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$
 $p(A) > 0$. Soit $\mu = \lambda^m$ et $A \neq 0 \neq 0$.
 Soit $\lambda = \text{eigenvalue}$
 tel que $\lambda > 0$

$\forall y \in E(A - \lambda I)$, $y_1 = y_2 = 0$ et
 $x = (y_1, y_2) \in E(A - \lambda I)$

On a $Ay = \lambda y$ donc $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \lambda y_i \forall i \in \{1, 2\}$

Donc $\lambda y_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = (Ay)_i$
 Supposons $\lambda < 0$ pour tout i . Alors :

$(Ay)_i \leq \lambda y_i \leq (A^h)_i$ pour
 $(1 + \varepsilon) y_i \leq (A^h)_i$ car $A \geq 0$.

En sommant sur i :

$(1 + \varepsilon) \sum y_i \leq \sum (A^h)_i \leq \sum (A^h)_i$
 $\neq 0$

Donc $1 + \varepsilon \leq \sum (A^h)_i \rightarrow p(A) = 1$
 absurde.

Donc $\lambda y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$ pour un i
 $= \lambda |y| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |y_j|$
 $= \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |y_j|$ Par la définition de E ,
 on a $|y| = \alpha \sum y_j$ d'où $\alpha \in E(A - \lambda I)$

De plus, si $\alpha = 0$, et $A\alpha = \lambda \alpha$
 alors $\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = 0$ d'où $\lambda \geq 0$
 donc $\alpha = 0$ et $\lambda = 0$

Alors :
 λ admet un $\alpha > 0$.

De plus :
 $\text{dim}(E(A)) = 1$ Soit $y \in E(A)$,

$\lambda y \neq 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha y = 0$

donc $\alpha - \lambda y \in E(A)$ a sa première
 coordonnée nulle,
 donc $\alpha - \lambda y = 0$ et $\alpha = \lambda y$.

$p(A) = 1$ si simple. Supposons le contraire

$\exists y \in \mathbb{R}^n$, $Ay = \lambda y$
 Alors $\exists z \in \mathbb{R}^n$ $Az = \mu z$ (grande
 Re)

pour $\exists u \in (\mathbb{R}^n)^*$ $Au = \nu u$ (grande
 u = grand
 pour $\alpha = 1$)

Mais pour $\lambda > 0$: $\|Au\|_1 = \|Au\|_1 + \lambda \|u\|_1$
 $> (1 + \varepsilon) \|u\|_1$

pour $\|A^h u\|_1 > (1 + \varepsilon) \|u\|_1$, même
 conclusion.

Soit B une base de $\mathbb{R}^n$ de A complétant (e)
 il suffit de résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On prend $y = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 P Autoadjointe. Alors $p(P) = 1$.

1^{er} cas $P \geq 0$
 Par Perron-Frobenius, $1 \in \text{Sp}(P)$ est la
 simple de P et $E_1(P)$ est une droite.

Alors $P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_n \end{pmatrix} Q$

où $|z_1|, |z_n| < 1$.

Alors $P^m = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_n^m \end{pmatrix} Q$
 $\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P^0$

On sait que S est formé des $M_n(\mathbb{R})$
 donc P^0 est autoadjointe et de plus $\text{rang}(P^0) = 1$

Donc $P^0 = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ où μ est une
 la de P ,
 car $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \in S$.

Rappel T invariant $\Leftrightarrow T P = P T$
 $\Leftrightarrow T u \in E_\lambda(P)$

En fait $\mu T^m = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \mu$
 car $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \in S$

Car $P^m \rightarrow T^m$,
 T^m initiale, $\mu P^m \rightarrow \mu T^m = \mu$

D'où la CV de T car $P \in S$.

De plus, $E_\lambda(P)$ est une droite.

En fait P^0 est de rang 1
 et un projecteur
 d'où $\text{dim } E_\lambda(P^0) = 1$

et $E_\lambda(P) \subseteq E_\lambda(P^0) \subseteq E_\lambda(T^0)$
 $\neq 0$ droite

Alors μ est l'un des λ de
 P car μ est la de P .

En fait $\mu > 0$ si appartient PF
 à $T P \geq 0$, $p(T) = 1$.

2^{es} cas P négative $T^m > 0$.

$\text{Sp}(P^m) = \text{Sp}(P)^m$ avec multi,
 donc même maximum.

Alors :

$E_\lambda(P) \subseteq E_\lambda(P^m) \subseteq E_\lambda(T^m)$
 $\neq 0$ droite

Donc $\mu > 0$ même ligne.

1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$

$p(A) > 0$. Soit, $\lambda_A = \lambda$ et $A^m = 0 \neq 0$.

Soit $\lambda = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$

$\forall y \in E(A) - \{0\}$, $y_1, \dots, y_n \neq 0$ et
 $x = (|y_1|, \dots, |y_n|) \in E(A) - \{0\}$

On a $Ay = \lambda y$ d'où $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \lambda y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

d'où $\lambda x_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = (Ax)_i$

Supposons $\lambda < 1$ par tout i . Alors :

$(1+\epsilon)x_i \leq (Ax)_i$ puis

$(1+\epsilon)x_i \leq (A^k x)_i$, car $A \geq 0$.

En sommant sur i :

$$(1+\epsilon)^k \|x\|_1 \leq \|A^k x\|_1 \leq \|A^k\|_1 \|x\|_1$$

$$\text{d'où } 1+\epsilon \leq \|A^k\|_1^{1/k} \rightarrow p(A) = 1$$

absurde.

D'où $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ pour un i

$$= \lambda |y_i| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |y_j|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| \quad \text{Par ce d'après de l'IT,}$$

on a $|y_i| = \lambda |y_i|$ d'où $x \in E(A) - \{0\}$

De plus, si $x_i = 0$, et $Ax = \lambda x$

$$\text{alors } \lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$$

d'où $x_j = 0 \quad \forall j$ exclu.

d'où $\lambda \geq 0$

$p(A) \in \sigma(A)$

Comme $\lambda \notin \sigma(A)$
 est l'unique λ de module max.

Alors :

λ admet un $\vec{v}_p > 0$.

De plus :

$\dim(E(A)) = 1$ Soit $x, y \in E(A)$,

$$x, y \neq 0, \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad x - \alpha y = 0$$

d'où $x - \alpha y \in E(A)$ a sa première coordonnée nulle,

d'où $x - \alpha y = 0$ et $x = \alpha y$.

$p(A) = 1$ si simple. Supposons le contraire

$\exists y \in \mathbb{C}^n$, $Ay = \lambda y$.

Alors $\exists z \in \mathbb{R}^n$ $Az = \lambda z$ (prendre Re)

puis $\exists u \in (\mathbb{R}^+)^n$ $Au = \lambda u$ (prendre $u = z$ pour $z \geq 0$)

$$\text{Alors par 20 : } \|Au\|_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii} u_i + \lambda \|u\|_1 > (1+\epsilon) \|u\|_1$$

puis $\|A^k u\|_1 > (1+\epsilon)^k \|u\|_1$, même conclusion.

Soit B une base de trig de A complétant (x)
 il suffit de résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} y_2 \\ \vdots \\ a_{1n} y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{on prend } y = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 | P Asymptotique - Alors $p(P) = 1$.
1^{er} cas $P > 0$.

Par Perron-Frobenius, $1 \in \text{Sp}(P)$ est la
 valeur propre de P et $E_1(P)$ est une droite.

Alors :
$$P = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \sigma_1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sigma_{n-1} \end{pmatrix} Q$$

où $|\sigma_1|, \dots, |\sigma_{n-1}| < 1$.

Alors,
$$P^m = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \sigma_1^m & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sigma_{n-1}^m \end{pmatrix} Q$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} Q = P^\infty$$

Où S est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$

donc P^∞ est stochastique et de plus $\text{rg } P^\infty = 1$.

Donc $P^\infty = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$ où μ est une
 loi de proba,
 car $\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix} \in S$.

Rappel π invariant $\Leftrightarrow \pi P = \pi$
 $\Leftrightarrow {}^t \pi \in E_1({}^t P)$

Ici :
$$\mu P^\infty = \begin{pmatrix} \mu & \mu_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & \mu_d \\ \vdots & \vdots \\ \mu & \mu_d \end{pmatrix} = \mu$$

 car $\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix} \in S$

Comme $P^m \rightarrow P^\infty$,

$$\mu_{P^0} \text{ initiale, } \mu_{P^0} P^m \rightarrow \mu_{P^0} P^\infty = \mu$$

D'où la CI en fait. car $P^\infty \in S$.

De plus, $E_1({}^t P)$ est une droite.

En effet ${}^t P^\infty$ est de rang 1
 et un projecteur
 d'où $E_1({}^t P^\infty) = 1$

et
$$\underbrace{E_1({}^t P)}_{\neq 0} \subseteq E_1({}^t P^\infty) \subseteq \underbrace{E_1({}^t P^\infty)}_{\text{droite}}$$

Alors μ est l'unique loi de
 proba invariante pour P .

Enfin $\boxed{\mu > 0}$ en appliquant PF
 à ${}^t P > 0$, $p({}^t P) = 1$.

2^{es} cas P ergodique : $P^m > 0$

$\text{Sp}_\mathbb{C}(P^m) = \text{Sp}_\mathbb{C}(P)^m$ avec mult^s,
 donc même raisonnement.

Alors :

$$\underbrace{E_1({}^t P)}_{\neq 0} \subseteq E_1({}^t P^m) \subseteq \underbrace{E_1({}^t P^\infty)}_{\text{droite}}$$

Alors égalité.

$\mu > 0$ □