

Th. (Lindeberg) Soit $(X_k)_{k=1,2,\dots}$ i.i.d. r.v. de m. centre

On note $\sigma_k^2 = E[X_k^2] = \text{Var}(X_k)$
 $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n E[X_k^2] = \text{Var}(S_n)$ car $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

On fait l'hypothèse de Lindeberg:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n E[X_k^2 \mathbb{1}_{|X_k| > \varepsilon \sigma_n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Alors $\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$

Ex. 1. Soit $X_k = 1$ avec proba $\frac{1}{2}$ et -1 avec proba $\frac{1}{2}$.

Alors $\sigma_k^2 = 1$ et $\sigma_n^2 = n$. On a $|X_k| \leq 1$ donc l'hypothèse de Lindeberg est vérifiée.

Donc $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$.

Ex. 2. On note $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$. Alors $\sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $n \geq n_0$.

On a $\sum_{k=1}^n E[X_k^2 \mathbb{1}_{|X_k| > \varepsilon \sigma_n}] \leq \varepsilon$ par hypothèse de Lindeberg.

Alors $E[X_k^2] = E[X_k^2 \mathbb{1}_{|X_k| \leq \varepsilon \sigma_n}] + E[X_k^2 \mathbb{1}_{|X_k| > \varepsilon \sigma_n}] \leq \varepsilon + \sigma_k^2$ □

Plan d'attaque: soit $t \in \mathbb{R}$. Regardons $|\phi_n(t) - e^{-t^2/2}|$ (Lévy)

où $\phi_n(t) = \phi_{S_n} = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}$ car i.i.d. $\hookrightarrow \phi_{X_k}(t) = E[e^{itX_k}]$

On a $e^{-t^2/2} = e^{-\frac{t^2}{2} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2}} = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}}$ Donc par L1

$$|\phi_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq \left| \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(t) - \prod_{k=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |\phi_{X_k}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}}|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=1}^n |\phi_{X_k}(t) - 1|}_{A_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left| e^{-\frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}} - \left(1 - \frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}\right) \right|}_{B_n}$$

R.A.N. : $A_n, B_n \rightarrow 0$

Majoration de B_n

On a $|e^x - (1+x)| = \left| \sum_{p=2}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \right| \leq |x|^2 e^{|x|}$
 Donc $\left| e^{-\frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}} - \left(1 - \frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}\right) \right| \leq \frac{t^4 \sigma_k^4}{4 \sigma_n^4} e^{\frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2}} \leq \frac{t^4 \sigma_k^4}{4 \sigma_n^4} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{t^2 \sigma_m^2}{2 \sigma_n^2}}$

Alors $B_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{t^4 \sigma_k^4}{4 \sigma_n^4} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{t^2 \sigma_m^2}{2 \sigma_n^2}} = \frac{t^4}{4 \sigma_n^4} \sum_{k=1}^n \sigma_k^4 \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{t^2 \sigma_m^2}{2 \sigma_n^2}}$ par L2.

Majoration de A_n

On a $e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$
 $e^{-ix} = 1 - ix - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

d'où on a $|e^{ix} - (1 + ix - \frac{1}{2}x^2)| \leq C|x|^3$

Donc $|\phi_{X_k}(t) - (1 - \frac{t^2 \sigma_k^2}{2 \sigma_n^2})| = |E[e^{itX_k}] - E[1 + itX_k - \frac{t^2}{2} X_k^2]|$
 $\leq E[|e^{itX_k} - (1 + itX_k - \frac{t^2}{2} X_k^2)|]$
 $\leq E[C|X_k|^3 \mathbb{1}_{|X_k| \leq \varepsilon \sigma_n}] + E[C|X_k|^3 \mathbb{1}_{|X_k| > \varepsilon \sigma_n}]$ par L1

$A_n \leq C \sum_{k=1}^n E[|X_k|^3 \mathbb{1}_{|X_k| \leq \varepsilon \sigma_n}] + C \sum_{k=1}^n E[|X_k|^3 \mathbb{1}_{|X_k| > \varepsilon \sigma_n}]$
 $\leq C \sum_{k=1}^n (E[|X_k|^3 \mathbb{1}_{|X_k| \leq \varepsilon \sigma_n}] + E[|X_k|^3 \mathbb{1}_{|X_k| > \varepsilon \sigma_n}])$
 $\leq \varepsilon E[|X_k|^3 \mathbb{1}_{|X_k| \leq \varepsilon \sigma_n}] \leq \varepsilon^2 E[|X_k|^4 \mathbb{1}_{|X_k| \leq \varepsilon \sigma_n}]$

$A_n \leq C \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^4 + C \varepsilon^2 o(n)$ (Lemme de de Moivre)

Conclusion: $\phi_n(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ et donc $\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$

Th - (Lindeberg) Soient $(x_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(X_{n,h})_{n \in \mathbb{N}, h \in [1, n]}$ i.i.d. selon k v.a. centrées

On note : $\begin{cases} \sigma_{n,h}^2 = \mathbb{E}[X_{n,h}^2] = \text{Var}(X_{n,h}) \\ \sigma_n^2 = \sum_{h=1}^n \mathbb{E}[X_{n,h}^2] = \text{Var}(S_n) \text{ où } S_n = \sum_{h=1}^n X_{n,h} \end{cases}$

On fait l'hypothèse de Lindeberg :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{h=1}^n \mathbb{E}[X_{n,h}^2 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| > \varepsilon \sigma_n}] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors $\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$

Rq OPS $\sigma_n = 1$ suffit à vérifier.

Lemme 1 Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{D}$. Alors :
 $|a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n| \leq |a_1 + \dots + a_n - b_1 - \dots - b_n|$

Preuve Par récurrence. $\square$

Lemme 2 On note $\sum_n = \sup_{k \in [1, n]}$. Alors $\sum_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $n \geq n_0$:

$$\sum_{h=1}^n \mathbb{E}[X_{n,h}^2 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| > \varepsilon}] \leq \varepsilon \text{ par hypothèse de Lindeberg.}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[X_{n,h}^2] = \mathbb{E}[X_{n,h}^2 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| \leq \varepsilon}] + \mathbb{E}[X_{n,h}^2 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| > \varepsilon}] \leq \varepsilon + \varepsilon^2 \quad \square$

Plan d'attaque : soit $t \in \mathbb{R}$. Majorer $|\phi_n(t) - e^{-t^2/2}|$ (levy)

où $\phi_n(t) = \phi_{S_n} = \prod_{h=1}^n \phi_{X_{n,h}}$ par i.i.d. $\hookrightarrow \phi_{\sigma(1,1)}$

On $e^{-t^2/2} = e^{-\frac{t^2}{2} \sigma_n^2} = e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{h=1}^n \sigma_{n,h}^2} = \prod_{h=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{n,h}^2}{2}}$ Donc par LN :

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - e^{-t^2/2}| &\leq \left| \prod_{h=1}^n \phi_{n,h} - \prod_{h=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{n,h}^2}{2}} \right| \\ &\leq \sum_{h=1}^n |\phi_{n,h}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{n,h}^2}{2}}| \\ &\leq \underbrace{\sum_{h=1}^n |\phi_{n,h}(t) - (1 - \frac{t^2 \sigma_{n,h}^2}{2})|}_{A_n} + \underbrace{\sum_{h=1}^n |e^{-\frac{t^2 \sigma_{n,h}^2}{2}} - (1 - \frac{t^2 \sigma_{n,h}^2}{2})|}_{B_n} \end{aligned}$$

RAN : $A_n, B_n \rightarrow 0$.

Majoration

On a $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}$

Donc $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}$

Donc $B_n \rightarrow 0$

Majoration

On a

d'où $A_n \rightarrow 0$

$$|A_n| \leq \epsilon \leq \epsilon^2 \quad \square$$

$$A) = e^{-t^2/2} \quad (\text{log})$$

$$\hookrightarrow \phi_{n,h}$$

Donc par L1

$$e^{-\frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_{n,h}^2}}$$

$$B_n = \left| \sum_{k=1}^n \left(e^{-\frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_{n,h}^2}} - \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_{n,h}^2} \right) \right) \right|$$

Majoration de B_n

$$\text{On a : } |e^z - (1+z)| = \left| \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^p}{p!} \right| \leq |z|^2 e^{|z|}$$

$$\text{Donc : } \left| e^{-\frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_{n,h}^2}} - \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_{n,h}^2} \right) \right| \leq \frac{t^4}{h} \frac{1}{\sigma_{n,h}^4} e^{\frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_{n,h}^2}}$$

$$\leq \frac{t^4}{h} \frac{1}{\sigma_{n,h}^4} \sum_m e^{\frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_m^2}}$$

$$\text{donc } B_n \leq \sum_{h=1}^n \frac{1}{\sigma_{n,h}^2} \left(\frac{t^4}{h} \sum_m e^{\frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_m^2}} \right)$$

$\downarrow$ par L2

Majoration de A_n

$$\text{On a : } \begin{cases} e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \\ e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{cases}$$

$$\text{donc on a } |e^{ix} - (1 + ix - \frac{1}{2}x^2)| \leq C_m n(|x|^2, |x|^3)$$

$$\text{Donc } \left| \phi_{n,h} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{\sigma_{n,h}^2} \right) \right) \right|$$

$$= \left| \mathbb{E} \left(e^{itX_{n,h}} \right) - \mathbb{E} \left(1 + itX_{n,h} - \frac{t^2}{2} X_{n,h}^2 \right) \right|$$

$$\leq \mathbb{E} \left(\left| e^{itX_{n,h}} - \left(1 + itX_{n,h} - \frac{t^2}{2} X_{n,h}^2 \right) \right| \right)$$

$$\leq \mathbb{E} \left(C_m n(|tX_{n,h}|^2, |tX_{n,h}|^3) \right) \quad \text{Avec, pour } \epsilon \leq 1$$

$$A_n \leq C \sum_{h=1}^n \mathbb{E} \left(m_n |tX_{n,h}|^2, |tX_{n,h}|^3 \right)$$

$$\leq C \sum_{h=1}^n \left(\mathbb{E} \left[|tX_{n,h}|^3 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| \leq \epsilon} \right] + \mathbb{E} \left[|tX_{n,h}|^2 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| > \epsilon} \right] \right)$$

$$\leq \epsilon \mathbb{E} \left[|tX_{n,h}|^2 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| \leq \epsilon} \right] \leq t^2 \mathbb{E} \left[|X_{n,h}|^2 \mathbb{1}_{|X_{n,h}| \leq \epsilon} \right]$$

$$A_n \leq C t^2 \sum_{h=1}^n \frac{1}{\sigma_{n,h}^2} + C t^2 o(1)$$

(hypothèse de Lind.)

$$\text{Conclusion : } \phi_n(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{et d'où } S_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$