

Soit E un K espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.

1. Si $K = \mathbb{C}$, u est orthodagonalisable (ODZ).
2. Si $K = \mathbb{R}$, il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix},$$

où $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^r$ et $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket : \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ avec $(a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Preuve.

1. Supposons $K = \mathbb{C}$, et donc E est un espace hermitien et u normal.

i) Montrons que $E = \bigoplus E_{\lambda}(u)$ (ie u diagonalisable).

- Soit F stable par u , $F^{\perp}$ est stable par u^* . En effet, si $y \in F^{\perp}, \forall x \in F : \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = 0$ car $u(x) \in F$. On a donc $\underline{u^*(F)} \subseteq F$.
- Comme $uu^* = u^*u$, on a $F = \bigoplus E_{\lambda}(u)$ est stable par u^* . Ainsi, $F^{\perp}$ est stable par $u^{**} = u$. Supposons $F^{\perp} \neq \{0\}$. Alors, comme $K = \mathbb{C}$, on peut trouver $x \in F^{\perp} \setminus \{0\}$ un vecteur propre de u : on a donc $x \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$, c'est absurde.
 u est diagonalisable, et si $\text{Sp}(u)$ n'a qu'un élément, on a terminé.

ii) Les sous-espaces propres sont orthogonaux.

- Soient $\mu \in \text{Sp}(u), y \in E_{\mu}(u) \setminus \{0\}$. Alors, on a

$$\langle u(y), y \rangle = \bar{\mu} \|y\|^2 = \langle y, u^*(y) \rangle. \quad (1)$$

Comme u est normal, on a $\|u^*(y)\|^2 = \langle u^*(y), u^*(y) \rangle = \|u(y)\|^2 = |\mu|^2 \|y\|^2$, donc (1) donne le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, il existe $\mu' \in \mathbb{C}$ tel que $\underline{u^*(y)} = \mu' y$, et (1) donne $\mu' = \bar{\mu}$.

- Soient $\lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$ distincts et $(x, y) \in E_{\lambda}(u) \times E_{\mu}(u)$ non nuls.

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \bar{\lambda} \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, u^*(y) \rangle \\ &= \bar{\mu} \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

d'où $\langle x, y \rangle = 0$. Ainsi, $E_{\lambda}(u) \perp E_{\mu}(u)$. En concaténant des BON des $E_{\lambda}(u)$, on a bien que u est ODZ.

2. $K = \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à u . On a montré que A est semblable (sur $\mathbb{C}$) à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \overline{\mu_1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mu_s \\ & & & & & & & \overline{\mu_s} \end{pmatrix},$$

avec $(\lambda_k) \in \mathbb{R}^r$ et $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En particulier, $n = r + 2s$.

Soit $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on note $a_k = \operatorname{Re}(\mu_k)$, $b_k = \operatorname{Im}(\mu_k)$. Soit $z \in E_{\mu_k}(A)$ tel que $\|z\| = \sqrt{2}$. On a $\bar{z} \in E_{\overline{\mu_k}}(A)$. Notons $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}^n$.

- $A(z + \bar{z}) = (a_k + ib_k)(x + iy) + (a_k - ib_k)(x - iy) = 2(a_k x - b_k y)$, donc

$$Ax = a_k x - b_k y.$$

De même, $A(z - \bar{z}) = 2i(b_k x + a_k y)$, d'où $Ay = b_k x + a_k y$.

- $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4i}(z + \bar{z})^*(z - \bar{z}) = \frac{1}{4i}(\|z\|^2 - \|\bar{z}\|^2) = 0$, donc $x \perp y$.

De plus, $\|x\|^2 = \frac{1}{4}(z + \bar{z})^*(z + \bar{z}) = \frac{1}{4}(\|z\|^2 + \|\bar{z}\|^2) = 1$. De même, $\|y\|^2 = 1$.

En concaténant une BON de $\sum E_{\lambda_k}(A)$ et les (x_k, y_k) , a bien une BON $\mathcal{B}$ de E (libre car orthonormée, et elle a $n = r + 2s$ éléments) telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}.$$

□