

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $U\mathbb{C}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degrés n de $\mathbb{C}_n[X]$.

Lemme 1 (continuité des racines). Soit $P = \prod (X - \lambda_i) \in U\mathbb{C}_n$ et $(P_k) \in (U\mathbb{C}_n)^\mathbb{N}$ tel que $P_k \rightarrow P$. En notant $P_k = \prod (X - \lambda_i^{(k)})$, on a une suite de permutation $(\sigma_k) \in (\mathfrak{S}_n)^\mathbb{N}$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \lambda_{\sigma_k(i)}^{(k)} \rightarrow \lambda_i.$$

Preuve. Par récurrence sur n .

Initialisation: Pour $n = 1$, $\lambda_k = -P_k(0) \rightarrow -P(0) = \lambda$ (continuité des formes linéaires) donc le résultat est vrai.

Hérédité: Soit $n \geq 2$, supposons le résultat au rang $n - 1$.

- On approche λ_n par une suite de racines:

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\sigma_k(n) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda_n - \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)}|$ soit minimal. Alors,

$$\begin{aligned} |\lambda_n - \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)}|^n &\leq \prod_{i=1}^k |\lambda_n - \lambda_i^{(k)}| \\ &= |P_k(\lambda_n)| \rightarrow |P(\lambda_n)| = 0. \end{aligned}$$

On a donc $\lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)} \rightarrow \lambda_n$.

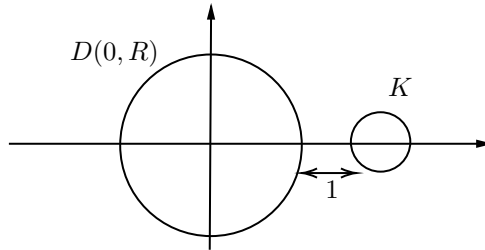
- Notons $P = (X - \lambda_n)Q$ et $\forall k \in \mathbb{N} : P_k = (X - \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)})Q_k$ avec $Q, Q_k \in U\mathbb{C}_{n-1}$. Il suffit de montrer que $Q_k \rightarrow Q$.

D'abord, on a

$$\begin{aligned} \|(X - \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)})(Q_k - Q)\| &\leq \|P_k - P\| + \|(X - \lambda_n)Q - (X - \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)})Q\| \\ &\leq \|P_k - P\| + |\lambda_n - \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)}| \|Q\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Remarques:

1. Comme $P_k \rightarrow P$, les racines de P_k sont bornées: $\exists R > 0, \forall k \in \mathbb{N} : \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)} \in D(0, R)$. (Application 4)
2. En notant $K = \overline{D(R+2, 1)}$, on a que $\|\cdot\|_{\infty, K}$ est une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$, et que $\forall \lambda \in D(0, R) : \forall x \in K : |x - \lambda| \geq 1$.



On a donc $\|Q_k - Q\|_{\infty, K} \leq \|(X - \lambda_{\sigma_k(n)}^{(k)})(Q_k - Q)\|_{\infty, K} \rightarrow 0$ par équivalence des normes, donc $\underline{Q_k \rightarrow Q}$.

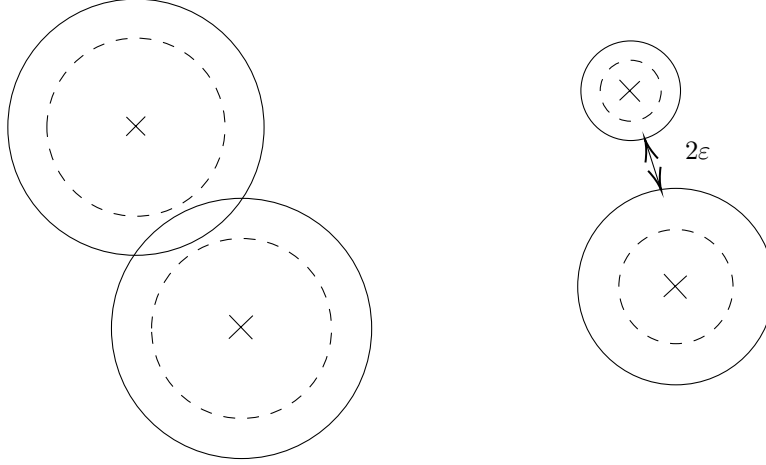
Par hypothèse de récurrence, on a donc une suite de permutations $(\sigma_k) \in \mathfrak{S}_n^\mathbb{N}$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \lambda_{\sigma_k(i)}^{(k)} \rightarrow \lambda_i$. $\square$

Proposition 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $(C_j)_{j \in J}$ les composantes connexes de $\cup D_i(A)$ ses disques de Gershgorin. Alors pour tout $j \in J$, si $n_j = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket | a_{i,i} \in C_j\}|$, alors C_j contient n_j valeurs propres de A (comptées avec multiplicité en tant que racine de χ_A).

Preuve. On a J fini car chaque $D_i(A)$ est connexe par arc, donc dans au plus un C_j . Si $|J| = 1$, on a terminé.

Notons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ & a_{2,2} & (ta_{i,j}) & \\ & & \ddots & \\ (ta_{i,j}) & & & \ddots \\ & & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$. On a γ continue, $\gamma(0) =$

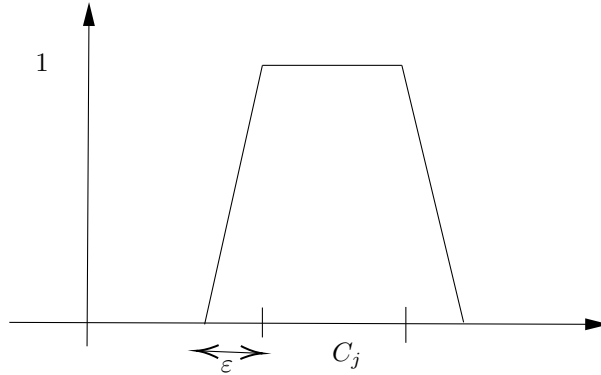
$\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ et $\gamma(1) = A$. γ permet donc de passer de $\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ à A en gardant la même diagonale. Les disques de Gershgorin de $\gamma(t)$ ont donc le même centre que ceux de A et des rayons plus petits.



On note $(\lambda_i(t))$ les valeurs propres de $\gamma(t)$. Les (C_j) sont compacts: $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{j \neq j'} d(C_j, C_{j'})$ est bien défini et strictement positif.

Soit $j \in J$, on note $f_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^n (1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x_i, C_j)) \vee 0.$$



On peut ainsi définir $g_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$ par $g_j(t) = f_j((\lambda_i(t)))$, qui va compter le nombre de valeurs propres dans C_j . g_j est en effet à valeur dans $\mathbb{N}$ car pour tout $t \in [0, 1]$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i(t)$ est dans un $D_{i_0}(\gamma(t))$, donc dans un C_{j_0} . Sa contribution est donc 1 si $j = j_0$ et 0 sinon.

Par le Lemme 1, g_j est continue (caractérisation séquentielle). Par connexité de $[0, 1]$, g_j est constante. Comme $g_j(0) = n_j$, on a donc $g_j(1) = n_j$. C_j contient n_j valeurs propres de A . $\square$

Quelques compléments

Théorème 3 (Gershgorin). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda \in D_i(A)$, où $D_i(A) = D(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|)$.

Application 4. Soit $P = X^n + \sum a_k X^k \in U\mathbb{C}_n$. Si $P(\lambda) = 0$, $|\lambda| \leq \sup\{|a_k| + 1\}$. En particulier, si $(P_k) \in U\mathbb{C}_n^{\mathbb{N}}$ vérifie $P_k \rightarrow P$, les racines de P_k sont bornées.

Preuve. On applique le théorème de Gershgorin à la matrice compagnon C_P .

Si $P_k \rightarrow P$, chaque coefficient $a_i^{(k)}$ converge, donc est borné. □

Application 5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) a ses disques de Gershgorin disjoints, elle est diagonalisable (DZ) sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

Preuve. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle a n valeurs propres disjointes donc est DZ.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est donc toujours DZ sur $\mathbb{C}$. Cependant, les disques de Gershgorin de A sont centrés sur l'axe des réels, donc si $\lambda \in D_i(A)$ est une valeur propre, $\bar{\lambda}$ en est aussi une (car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $\bar{\lambda} \in D_i(A)$, donc comme $D_i(A)$ ne contient qu'une valeur propre de A , $\lambda = \bar{\lambda}$, d'où $\text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$. □

Remarque 6. On a montré que les racines de P_k convergent vers les racines de P à permutation près. On ne peut pas avoir de "meilleur" résultat: il n'existe pas d'application continue $f : U\mathbb{C}_n \rightarrow \mathbb{C}$ continue qui à un polynôme associe une de ses racines dès que $n > 1$.

Preuve. Supposons qu'un tel f existe. Alors, on a en particulier que $g : z \mapsto f(X^n - z)$ est continue par composée. Comme $g(z)^n = z$, on a construit une racine n -ième continue sur $\mathbb{C}$.

Montrons maintenant que $n = 1$: $\forall \theta \in \mathbb{R} : g(e^{i\theta})^n = e^{i\theta}$, donc $h : \theta \mapsto g(e^{i\theta})e^{-i\frac{\theta}{n}} \in \mathcal{C}^0$ vérifie $h^n = 1$, donc h est à valeur dans $\mathbb{U}_n$.

Par connexité et continuité, h est constante: $\exists \omega \in \mathbb{U}_n, \forall \theta \in \mathbb{R} : g(\theta) = \omega e^{i\frac{\theta}{n}}$.

En particulier, comme $g(0) = g(2\pi)$, on a $e^{\frac{2\pi i}{n}} = 1$, donc $n = 1$. □

Fun Fact 1. On peut aussi exprimer le résultat du Lemme 1 comme la continuité de l'application $Z : U\mathbb{C}_n \rightarrow \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ qui à un polynôme P associe l'ensemble $Z(P)$ de ses racines (à permutation près). On vérifie donc que $d(Z(P_k), Z(P)) \rightarrow 0$, où $d : (x, y) \mapsto \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sup |x_{\sigma(i)} - y_i|$ est une distance sur $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$.