

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et (K_n) une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{U}$:

- $\forall n \in \mathbb{N} : K_n \subset K_{n+1}^\circ$,
- $\forall n \in \mathbb{N} : K_n \subset_c \mathcal{U}$, c'est-à-dire K_n est un compact de $\mathcal{U}$.

Alors, en notant pour $n \in \mathbb{N}, f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, $d_n(f, g) = \|f - g\|_{\infty, K_n}$,

$$d : (f, g) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(d_n(f, g) \wedge \frac{1}{2^n} \right)$$

est une distance sur $\mathcal{O}(\mathcal{U})$, qui donne la convergence uniforme sur tous compacts de $\mathcal{U}$.

Théorème 1 (Montel). Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{U})$. $\mathcal{A}$ est relativement compacte (i.e. $\overline{\mathcal{A}}$ compact) ssi $\mathcal{A}$ est "bornée":

$$\forall K \subset_c \mathcal{U} : \exists C_K > 0, \forall f \in \mathcal{A} : \|f\|_{\infty, K} \leq C_K. \quad (\text{☞})$$

Preuve. [ZQ, p 155]

($\Rightarrow$) Soit $K \subset_c \mathcal{U}$, on note $F : f \mapsto \|f\|_{\infty, K}$. F est bien définie et continue sur $\mathcal{O}(\mathcal{U})$. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est compact, on a $C_K := \sup_{\mathcal{A}} F < +\infty$. Ainsi, on a bien $\forall f \in \mathcal{A} : \|f\|_{\infty, K} \leq C_K$.

($\Leftarrow$) Comme $(\mathcal{O}(\mathcal{U}), d)$ est complet (par le théorème de Weierstrass), il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est précompact, ie

$$\forall R > 0 : \exists I \text{ fini}, (f_i) \subseteq \mathcal{A}^I, \forall f \in \mathcal{A} : \exists i \in I, d(f, f_i) \leq R. \quad (1)$$

- Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^N} \leq R$. Il suffit alors de trouver (f_i) tel que pour tout $f \in \mathcal{A}$, on ait f_i tel que $\sup_{n \leq N} (d_n(f, f_i) \wedge \frac{1}{2^n}) \leq R$ pour vérifier (1). En utilisant que les (K_n) sont croissants, on se limite à montrer que $\underline{d_N(f, f_i) = \|f - f_i\|_{\infty, K_N} \leq R}$.
- On note $\mathcal{F} = \{f|_{K_N} \mid f \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}^0(K_N, \mathbb{C})$. On va montrer que $\mathcal{F}$ est précompact (par Ascoli, car K_N est compact et $\mathbb{C}$ complet).

1. $\forall z \in K_N : \eta_z = \{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\} \subseteq D(0, C_{K_N})$ est relativement compact.
2. Il reste à montrer que $\mathcal{F}$ est équicontinu:

$$\forall a \in K_N : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0, \forall z \in K_N : |z - a| \leq \delta \implies \forall f \in \mathcal{F} : |f(z) - f(a)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

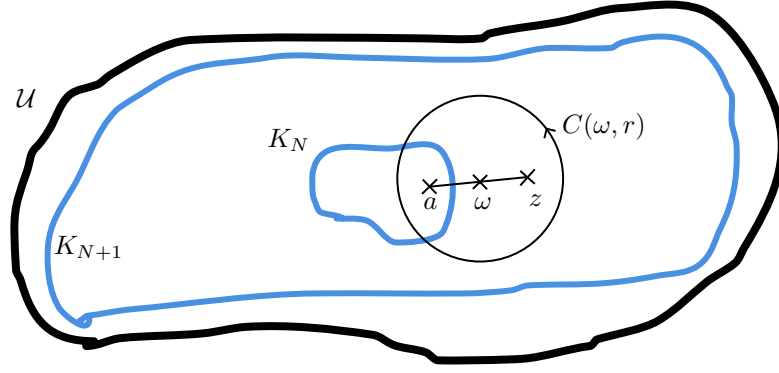
Soit $a \in K_N$. Comme $K_N \subseteq K_{N+1}^\circ$, $\exists r > 0, \overline{D(a, 2r)} \subseteq K_{N+1}$.

Par inégalité des accroissements finis,

$$\forall f \in \mathcal{F} : \forall z \in D(a, r) : |f(z) - f(a)| \leq \sup_{\omega \in [a, z]} |f'(\omega)| |z - a|. \quad (3)$$

Il suffit donc de contrôler $f'(\omega)$ indépendamment de f . On va utiliser la formule de Cauchy:

Soient $f \in \mathcal{F}$ et $\omega \in [a, z]$.



$$\begin{aligned}
 f'(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\omega, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \omega)^2} d\zeta \\
 |f'(\omega)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\omega + re^{i\theta})|}{|re^{i\theta}|^2} |ire^{i\theta}| d\theta \\
 &\leq \frac{2\pi C_{K_{N+1}}}{2\pi r},
 \end{aligned}$$

donc par (3), $\forall f \in \mathcal{F} : \forall z \in D(a, r) : |f(z) - f(a)| \leq \frac{C_{K_{N+1}}}{r} |z - a|$. En posant $\delta = r \wedge \frac{r\varepsilon}{C_{K_{N+1}}}$, on a donc bien (2).

Par Ascoli, $\mathcal{F}$ est précompact dans $(\mathcal{C}^0(K_N, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty, K_N})$. On a alors bien I fini et $(f_i) \in \mathcal{A}^I$ tel que $\forall f \in \mathcal{A} : \exists i \in I, d_N(f, f_i) = \|f - f_i\|_{\infty, K_N} \leq R$. On a donc vérifié (1): $\mathcal{A}$ est précompact, donc relativement compact de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$.

□

Voici un résultat pouvant être démontré à l'aide du théorème de Montel:

Lemme 2 (Osgood). Soit $(f_n) \in \mathcal{O}(\mathcal{U})^{\mathbb{N}}$ qui CVS vers f sur $\mathcal{U}$. Alors f est holomorphe sur un ouvert dense de $\mathcal{U}$.

Preuve. On note

$$\Omega = \bigcup_{V \subseteq \mathcal{U} \text{ ouvert tq } f|_V \in \mathcal{O}(V)} V,$$

qui est bien ouvert de $\mathcal{U}$. Il reste à montrer sa densité. Soient $a \in \mathcal{U}$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(a, r)} \subseteq \mathcal{U}$. Comme $\overline{D(a, r)}$ est complet, on peut donc appliquer le théorème de Baire pour montrer que $\Omega \cap \overline{D(a, r)} \neq \emptyset$.

On note pour $k \in \mathbb{N}$, $F_k = \{z \in \overline{D(a, r)} \mid \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(z)| \leq k\}$, et on a bien F_k fermé et $\cup F_k = \overline{D(a, r)}$ est d'intérieur non-vidé. Par le théorème de Baire, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{V} := \overset{\circ}{F_k} \neq \emptyset$.

Par le théorème de Montel, (f_n) est relativement compacte de $\mathcal{O}(\mathcal{V})$, donc (à extraction près) CVU sur tous compacts de $\mathcal{V}$ vers $g \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$. Par unicité de la limite simple, $f|_{\mathcal{V}} = g$ est donc holomorphe sur $\mathcal{V}$, donc $\Omega \cap \overline{D(a, r)} \neq \emptyset$: Ω est dense dans $\mathcal{U}$.

□

Remarque 3. Supposons $\mathcal{U}$ connexe et chaque K_n d'intérieur non-vidé. Si $(\mathcal{O}(\mathcal{U}), d)$ était normable, le théorème de Montel donne que les compacts sont les fermés bornés, ce qui contredit le théorème de Riesz. La CVU sur tout compact n'est donc pas normable. [ZQ, p 263]

Preuve. Par le principe des zéros isolés, chaque d_n définit une distance sur $\mathcal{U}$. On reconnaît alors la topologie produit sur $E = \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$, où $E_n = \mathcal{O}(\mathcal{U})$ munit de d_n .

Dans [ZQ, p 263], on a ensuite que les ensembles $\mathcal{A}$ vérifiant la condition $(\clubsuit)$ sont exactement ceux tels que pour tout U voisinage de 0, il existe $t_0 > 0$ tel que $\forall t \geq t_0 : X \subseteq tU$.

Le sens direct utilise que les pavés forment une base de voisinage de 0. Pour le sens réciproque, on utilise des voisinages U de la forme $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ avec $U_n = E_n$ si $n \neq n_0$ et $U_{n_0} = \mathcal{B}_{d_{n_0}}(0, 1)$.

Si la CVU sur tous compacts est donnée par une norme $\|\cdot\|$, la condition précédente revient à exiger que $\mathcal{A}$ soit inclus dans une boule $\mathcal{B}_{\|\cdot\|}(0, r)$ avec $r > 0$.

On a donc en particulier que la boule unité $\mathcal{B}_{\|\cdot\|}(0, 1)$ vérifie $(\clubsuit)$, donc est relativement compacte. Comme $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ n'est pas de dimension finie, le théorème de Riesz donne une contradiction: aucune norme ne définit la CVU sur tous compacts. $\square$

References

[ZQ] Zuily and Queffélec. *Analyse pour l'agrégation*.