

Hirsh - Lacombe : Éléments d'analyse fonctionnelle	Théorème de Müntz L^2	Leçons : 149 - 201 - 209
--	---	-----------------------------

Pour tout réel r , on notera f_r la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_r(x) = x^r$. On notera également $F_p = \text{Vect}(f_{r_1}, \dots, f_{r_p})$.

Lemme 1. Soit $(r_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs ou nuls. La famille $(f_{r_p})_{p \in \mathbb{N}}$ est totale dans $L^2([0, 1])$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(f_n, F_p) = 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $L^2([0, 1])$. C'est le cas car cette famille est totale dans $C([0, 1])$, pour la norme uniforme (qui contrôle la norme 2), qui est dense dans $L^2([0, 1])$ pour la norme 2.

($\Rightarrow$) Supposons la famille $(f_{r_p})_{p \in \mathbb{N}}$ totale dans $L^2([0, 1])$. Soit $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}$, on veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(f_n, F_N) < \epsilon$. Par hypothèse, comme $f_n \in L^2([0, 1])$, il existe un polynôme P tel que $\|f_n - P\|_2 < \epsilon$ et

$$P(x) = \sum_{k=1}^N a_k x^{r_k}.$$

Comme $P \in F_N$ on a

$$d(f_n, F_N) \leq \|f_n - P\|_2 < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(f_n, F_p) \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow \infty$. Soit $f \in L^2([0, 1])$, $\epsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale, il existe

$$P = \sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n$$

tel que $d(f, P) < \frac{\epsilon}{2}$. Par hypothèse, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(f_n, F_{p_0}) < \frac{\epsilon}{2N_1}$. Alors

$$d(f, F_{p_0}) < \frac{\epsilon}{2} + N_1 \frac{\epsilon}{2N_1} = \epsilon.$$

□

Lemme 2. On a pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$

$$d^2(f_n, F_p) = \frac{1}{2n+1} \prod_{j=1}^p \left(\frac{n-r_j}{n+r_j+1} \right)^2.$$

Démonstration. F_p étant un espace vectoriel, on a

$$d(f_n, F_p) = d(f_n, P_{F_p} f_n) = \|f_n - P_{F_p} f_n\| \text{ avec } P_{F_p} f_n = \sum_{i=1}^p \frac{\langle f_n, g_i \rangle}{\|g_i\|^2} g_i.$$

P_{F_p} est la projection orthogonale sur F_p donc on a

$$d(f_n, F_p)^2 = \|f_n\|^2 - \|P_{F_p} f_n\|^2 = \|f_n\|^2 - c G_p^{-1} t c$$

avec $c = (\langle f_n, g_1 \rangle, \dots, \langle f_n, g_p \rangle)$. Notons

$$\tilde{G} = \text{Gram}(f_n, g_1, \dots, g_p) = \begin{pmatrix} G_p & t c \\ c & \|f_n\|^2 \end{pmatrix}.$$

Par la formule du complément de Schur, comme G_p est inversible, on a

$$\det \tilde{G} = \det G_p \left(\|f_n\|^2 - c G_p^{-1} {}^t c \right) = \det G_p d(f_n, F_p)^2.$$

On a pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+$

$$\langle f_a, f_b \rangle = \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}.$$

Ainsi, $G_p = \left(\frac{1}{r_i + r_j + 1} \right)_{1 \leq i, j \leq p}$, $c = \left(\frac{1}{n+r_1+1}, \dots, \frac{1}{n+r_p+1} \right)$ et $\|f_n\|^2 = \frac{1}{2n+1}$. Par la formule de Cauchy pour le déterminant,

$$\det \left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right)_{1 \leq i, j \leq p} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_j - \alpha_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\beta_j - \beta_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (\alpha_i + \beta_j)}.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \det G_p &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (r_j - r_i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (r_i + r_j + 1)} \\ \det \tilde{G} &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (r_j - r_i)^2 \prod_{j=1}^p (n - r_j)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (r_i + r_j + 1) \prod_{j=1}^p (n + r_j + 1)^2 (2n + 1)}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$d(f_n, F_p)^2 = \frac{\prod_{j=1}^p (n - r_j)^2}{\prod_{j=1}^p (n + r_j + 1)^2 (2n + 1)} = \frac{1}{2n + 1} \prod_{j=1}^p \left(\frac{n - r_j}{n + r_j + 1} \right)^2.$$

□

Théorème 1 (Théorème de Müntz). *Soit $(r_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs ou nuls. La famille $(f_{r_p})_{p \in \mathbb{N}}$ est totale dans $L^2([0, 1])$ si, et seulement si,*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{r_p} = \infty.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons la famille $(f_{r_p})_{p \in \mathbb{N}}$ totale. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d(f_n, F_p) \rightarrow 0, \text{ lorsque } p \rightarrow \infty.$$

Or

$$\begin{aligned} \ln(d(f_n, F_p)) &= -\frac{1}{2} \ln(2n + 1) + \sum_{j=1}^p (\ln(|n - r_j|) - \ln(n + r_j + 1)) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2n + 1) - \sum_{j=1}^p \int_{|n - r_j|}^{n + r_j + 1} \frac{1}{t} dt \\ &\geq -\frac{1}{2} \ln(2n + 1) - \sum_{j=1}^{p_0} \frac{2r_j + 1}{n + r_j + 1} - \sum_{j=p_0+1}^p \frac{2n + 1}{n + r_j + 1}. \end{aligned}$$

Or on a que

$$\ln(2n+1) + \sum_{j=1}^{p_0} \frac{2r_j+1}{|n-r_j|} \text{ est une constante et } \ln(d(f_n, F_p)) \rightarrow -\infty \text{ lorsque } p \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\sum_{j=p_0+1}^p \frac{2n+1}{n+r_j+1} \rightarrow \infty \text{ lorsque } p \rightarrow \infty.$$

Et on a la divergence de notre série.

($\Leftarrow$) Supposons que la série diverge.

$$\begin{aligned} \ln(d(f_n, F_p)) &= -\frac{1}{2} \ln(2n+1) - \sum_{j=1}^p \int_{|n-r_j|}^{n+r_j+1} \frac{1}{t} dt \\ &\leq -\frac{1}{2} \ln(2n+1) - \sum_{j=1}^{p_0} \frac{2r_j+1}{|n-r_j|} - \sum_{j=p_0+1}^p \frac{2n+1}{|n-r_j|}. \end{aligned}$$

Or on a que

$$\ln(2n+1) + \sum_{j=1}^{p_0} \frac{2r_j+1}{|n-r_j|} \text{ est une constante et } \sum_{j=p_0+1}^p \frac{2n+1}{|n-r_j|} \rightarrow \infty \text{ lorsque } p \rightarrow \infty.$$

Ainsi, lorsque $p \rightarrow \infty$, on a $\ln(d(f_n, F_p)) \rightarrow -\infty$ et $d(f_n, F_p) \rightarrow 0$ et d'après le lemme, la famille $(f_{r_p})_{p \in \mathbb{N}}$ est totale dans $L^2([0, 1])$. $\square$