

Leçon 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales en fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

1. Méthodes de calcul internes. —

1. *Evaluation d'une primitive. —*

- Rem : La linéarité de l'intégrale permet de casser la recherche de la primitive en des recherches plus simples
- Théorème de Newton-Leibniz
- Quelques primitives usuelles ($\int \frac{1}{1+x^2} dx$, $\int_{\mathbb{R}^+} \lambda \exp(-\lambda x) dx, \dots$)
- Calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle par Décompo en éléments simples

2. *Intégration par parties. —*

- Intégration par Parties
- Intégrale de Wallis
- $\Gamma(x)x = \Gamma(x+1)$
- Autre exemple classique

3. *Théorèmes de Fubini. —*

- Théorème de Fubini sur \mathbb{R}^n : Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable. Alors les intégrales suivantes existent et vérifient : $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy$. Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, on a les mêmes égalités.
- Calcul de l'intégrale de Gauss ($\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$)
- Volume de la boule unité euclidienne de \mathbb{R}^n ($V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}$ si n pair)
- Intégrale de Fresnel : $\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2) dx = \int_{\mathbb{R}} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

4. *Changement de variables. —*

- Théorème : Pour U ouvert de \mathbb{R}^n et $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -difféom de jacobien J_Φ , pour $V := \Phi(U)$, et pour tout $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, on a : $\int_V f(v) dv = \int_U (f \circ \Phi)(u) \det(J_\Phi(u)) du$
- Changement de variables polaire $dx dy = r dr d\theta$
- Changement de variables cylindrique $dx dy dz = r dr d\theta dz$
- Ex : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$
- Calcul d'intégrale d'une série trigonométrique en $\cos(\theta)$ avec $t = \tan(\frac{\theta}{2})$

5. *Formule de Green-Riemann. —*

- Soit K un compact à bords de \mathbb{R}^2 et $Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert U contenant K. Alors : $\int_{\partial K^+} (Pdx + Qdy) = \iint_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$
- Calcul de l'aire d'un compact à bords : $A = \iint_K dx dy = \int_{\partial K^+} (x dy)$
- Calcul de l'aire de la Laimniscate (bord donné par $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$)

2. Méthodes de calcul externes. —

1. *Convergence de suite/séries. —*

- Théorème de Beppo-Levi (X, A, μ) espace mesuré et $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_n f_n$ est A-mesurable et $\int_X \lim_n (f_n) d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$
- Appli : Interverson série-intégrale pour $(f_n)_n$ suite de fonctions mesurables positives
- Interverson limite-intégrale (CV dominée, série alternée)
- Exemple
- Exemple de calcul d'une IàP
- Théorème de continuité et dérivabilité des IàP
- Ex : Pour X de loi $N(0, 1)$, $\Phi_X(t) = \sqrt{\pi} \cdot \exp(-\frac{t^2}{4})$
- Exemple de calcul d'intégrale via une équation diff

2. *Théorème des zéros isolés et formule des résidus. —*

- Définition de l'indice d'un lacet : $Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$
- Formule de Cauchy
- Théorème des zéros isolés
- Ex : Calcul de la transformée de Fourier de $\exp(-\frac{x^2}{2})$ par prolongement holom
- Définition du résidu avec le développement en série de Laurent
- Formule des résidus
- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
- **Dev** : Formule des compléments : $\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \forall z \text{ tq } 0 < Re(z) < 1$. Cela permet de prolonger analytiquement la fonction Γ à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Calcul de $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx$

3. Approximations numériques pour le calcul approché. —

- Méthode par interpolation de Lagrange
- Méthode des rectangles à gauche
- Méthode des rectangles à droite
- Méthode du point-milieu
- Méthode des trapèzes (résumées en tableau pour pas bouffer trop de place)
- Un exemple
- **Dev** : Approximation d'intégrale par la méthode de Monte-Carlo : Soit $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. On note $I = \int_{[0,1]^d} f(x) d\lambda(x)$. Pour $X_{n,k}$ des v.a. réelles iid de loi $U_{[0,1]}$, on construit $Y_n := (X_{n,1}, \dots, X_{n,d})$ qui est une famille de v.a. iid de loi uniforme sur $[0, 1]^d$. On note $S_n = (f(Y_1) + \dots + f(Y_n))/n$. Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq (\frac{\|f\|_2}{\|f\|_\infty})^2$ assez petit, on a : $P(I - S_n > \varepsilon) \leq 2 \exp(-n(\frac{\varepsilon \|f\|_\infty}{\|f\|_2})^2)$. L'approximation de l'intégrale de f par le barycentre de n évaluations données par des v.a. uniformes a ainsi une probabilité de ne pas être ε -proche de l'intégrale de f qui décroît exponentiellement en n.

Références

Gourdon : Partie I

Briane, Pagès : Volume de la boule unité et exemples et Beppo-Levi

Amar-Materon : Formule des compléments (Dev) , partie holomorphie

Ouvrard, Probas 2 : Méthode de Monte Carlo. (Dev)

Demailly : Partie analyse numérique.

May 9, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes