

Développement : Isomorphisme entre l'espace des matrices et son dual

Référence : Algèbre et Géométrie, Rombaldi, pages

Leçon : 159.

Théorème :

L'application $A \mapsto \text{Tr}(A \cdot)$ définit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$.

Démonstration. On procède en plusieurs étapes :

- ★ **Étapes n°1 :** Montrer que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est formé des homothéties, et donc des matrices de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Il est clair que les homothéties sont dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Réciproquement, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a en particulier pour tous i, j compris entre 1 et n , $AE_{ij} = E_{ij}A$. En appliquant cela au vecteur de la base canonique e_j , on obtient :

$$AE_{ij}e_j = Ae_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}e_k$$

Et d'autre part :

$$E_{ij}Ae_j = E_{ij} \left(\sum_{k=1}^n a_{kj}e_k \right) = a_{jj}e_i$$

Par identification, on en déduit que $a_{ki} = 0$ pour $k \neq i$ et $a_{ii} = a_{jj}$. C'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

On désigne par θ l'application linéaire qui associe à toute matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la forme linéaire $\theta(B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \theta(B)(A) = \text{Tr}(BA)$$

- ★ **Étapes n°2 :** Montrer que θ est injective.

Dire que B est dans le noyau de θ est équivalent à dire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(BA) = 0$. Ceci équivaut encore à dire que pour tous i, j compris entre 1 et n , $\text{Tr}(BE_{ij}) = 0$.

Calculons l'action de la matrice BE_{ij} sur un vecteur de la base canonique e_k (pour tout k compris entre 1 et n) :

$$BE_{ij}e_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ Be_i = \sum_{m=1}^n b_{mi}e_m & \text{si } k = j \end{cases}$$

On en déduit par le calcul de la trace que $\text{Tr}(BE_{ij}) = b_{ji}$. Comme cette trace est nulle pour tous i, j , tous les coefficients b_{ji} sont nuls, c'est-à-dire que $B = 0$. On a donc $\ker(\theta) = \{0\}$, ce qui prouve que θ est injective.

- ★ **Étapes n°3 :** En déduire que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe alors une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = \text{Tr}(BA)$.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ ont la même dimension (n^2), l'application linéaire injective θ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual. Ainsi, toute forme linéaire φ est de la forme $\theta(B)$ avec B uniquement déterminé.

De plus, avec l'identité $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, on en déduit également que les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont toutes de la forme $A \mapsto \text{Tr}(AB)$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

□

Application :

En utilisant le résultat précédent, montrer que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, il existe alors un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = \lambda \text{Tr}(A)$.

Démonstration. Soit φ une forme linéaire vérifiant l'hypothèse de symétrie. Il existe une unique matrice $B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = \text{Tr}(AB_0)$. Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors :

$$\varphi(AB) = \text{Tr}(ABB_0) \quad \text{et} \quad \varphi(BA) = \text{Tr}(BAB_0) = \text{Tr}(B_0BA) = \text{Tr}(AB_0B)$$

Par hypothèse, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, d'où :

$$\text{Tr}(ABB_0) = \text{Tr}(AB_0B) \implies \text{Tr}(A(BB_0 - B_0B)) = 0$$

Cette égalité étant vraie pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a par définition $\theta(BB_0 - B_0B) = 0$. L'injectivité de θ implique que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$BB_0 - B_0B = 0$$

Ce qui signifie que B_0 commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: elle est donc dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après la question 1, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $B_0 = \lambda I_n$.

Finalement, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\varphi(A) = \text{Tr}(AB_0) = \text{Tr}(A \cdot \lambda I_n) = \lambda \text{Tr}(A)$$

□