

### Leçon 234 - Espaces $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ .

On se donne  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  un espace mesuré, et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue.

#### 1. Définition des espaces $L^p$ et premiers résultats. —

##### 1. Les espaces $L^p$ . —

- Def : Pour  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\mathbb{L}^p(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable tq } \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty\}$ . On note alors  $\|f\|_p := (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$ .
- Et  $\mathbb{L}^\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable tq } \exists M > 0 \text{ tq } f \leq_{\mu-pp} M\}$ . On note alors  $\|f\|_\infty := \inf(\{M > 0 \text{ tq } f \leq_{\mu-pp} M\})$ .
- Ex : Pour  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbb{N})$  et  $\mu$  la mesure de comptage,  $l^p(\mathbb{N}) := \mathbb{L}^p(\mathbb{N})$  est l'ensemble des suites  $(x_n)_n$  telles que  $\sum_n |x_n|^p \leq +\infty$  et  $l^\infty(\mathbb{N}) := \mathbb{L}^\infty(\mathbb{N})$  est l'ensemble des suites bornées.
- Pro : Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , et  $f \in \mathbb{L}^p(X)$ , on a  $\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ , donc  $\lambda \cdot f \in \mathbb{L}^p(X)$ .
- Inégalité de Minkowski :  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .
- Pro : Les  $\mathbb{L}^p(X)$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $\|\cdot\|_p$  est une semi-norme.
- Rem : Pour  $0 < p < 1$  on aurait une inégalité de la forme  $\|f + g\|_p \leq A_p(\|f\|_p + \|g\|_p)$  avec  $A_p > 1$ . Ainsi, l'application  $\|\cdot\|_p$  ne vérifierait pas l'inégalité triangulaire.
- Contre-ex : Pour  $X = \mathbb{R}$  et  $\mu = \lambda$ , la fonction  $f(x) = \chi_{\mathbb{N}}(x)$  est de norme  $p$  nulle  $\forall 1 \leq p \leq +\infty$ , bien que  $f$  ne soit pas nulle.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour  $f, g \in \mathbb{L}^2(X)$ ,  $\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ . Ainsi,  $\mathbb{L}^2(X)$  est stable pour le produit.
- Inégalité de Hölder : Pour  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ,  $f \in \mathbb{L}^p(X)$ ,  $g \in \mathbb{L}^q(X)$ , on a :  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ . Donc  $fg \in \mathbb{L}^r(X)$  (Vrai aussi pour  $p = \infty$  et  $q = 1$ ).

##### 2. Les espaces $L^p$ : définition, inclusions, complétude. —

- Def+Pro : Pour  $1 \leq p \leq +\infty$  on définit  $N_p(X) := \{f \in \mathbb{L}^p(X) \text{ tq } \|f\|_p = 0\}$ . C'est un s-ev de  $\mathbb{L}^p(X)$  qui est l'ensemble des fonctions nulles presque partout.
- Def : On définit  $L^p(X) := \mathbb{L}^p(X)/N_p(X)$ .
- Pro : Pour  $f \in L^p(X)$ ,  $\|f\|_p$  est bien définie, et est une norme.
- Rem : En quotientant l'espace vectoriel par l'ensemble des fonctions de semi-norme nulle, on a obtenu un espace vectoriel normé.  
Pour les  $l^p(\mathbb{N})$ , ce quotient est trivial car la seule fonction nulle presque partout est la fonction nulle.
- Théorème de Riesz-Fischer : Pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$  est complet.  
De plus, pour toute suite  $(f_n)_n$  de  $L^p(X)$  on peut extraire une suite pour laquelle tout choix de représentants dans  $\mathbb{L}^p$  converge presque partout.
- Pro : Dans un espace probabilisé (de mesure finie), on a :  $f \in L^p \Rightarrow f \in L^q \forall 1 \leq q \leq p$ .  
Et  $\lim_{p \rightarrow \infty} (\|f\|_p) = \|f\|_\infty \in [0, +\infty]$ .
- Contre-Ex :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R})$  mais est dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
- Pro : Si  $f \in L^p$  et  $f \in L^q$  pour  $1 \leq q \leq p$ , alors  $f \in L^r \forall q \leq r \leq p$ .

- Pro : Si  $f \in L^p$  alors  $f \in L^q \forall p \leq q$ . On a la propriété "inverse" du cas d'un espace de mesure finie.

##### 3. Convergence dans les $L^p$ . —

- Pro : Si la mesure est finie, pour tous  $q \leq p$ , on a  $\|\cdot\|_q \leq \mu(X)^{\frac{p-q}{qp}} \|\cdot\|_p$ . Donc une convergence dans  $L^p$  implique une convergence dans  $L^q$ .
- Si la mesure est finie, l'inclusion de  $L^q(X)$  dans  $L^p(X)$  est topologique.
- Théorème de convergence dominée dans un  $L^p$  : Soit  $f_n \in L^p$  une suite de fonctions dont les représentants convergent  $\mu$  presque partout vers  $f$ . Si il existe  $g \in L^p$  tel que  $|f_n| \leq_{\mu-pp} g$ , alors  $f_n \rightarrow_{\|\cdot\|_p} f$ .
- Contre-ex :  $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$  converge presque partout vers 0 mais ne converge pas en norme  $L^p$  vers 0.
- Pro : La convergence  $L^p$  n'implique pas la convergence presque partout si  $1 \leq p \leq \infty$ . La convergence  $L^\infty$  implique la convergence presque partout.
- Contre-exemple pour  $L^p$ .
- Contre-ex : Pour  $f_n(x) = x^n$  sur  $]0, 1[$ , on a  $\|f_n\|_\infty = 1$  mais  $f_n \rightarrow 0$  presque partout.
- Rem : Le théorème de Riesz-Fischer donne cependant la convergence presque partout d'une suite extraite.

#### 2. Analyse fonctionnelle dans les $L^p$ . —

##### 1. Dualité. —

- Théorème de Riesz : Pour  $1 < p < \infty$ , il y a un isomorphisme isométrique entre le dual de  $L^p$ ,  $(L^p)'$  et  $L^q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
Le dual de  $L^1$  est isométrique à  $L^\infty$  mais le dual de  $L^\infty$  n'est pas isométrique à  $L^1$  (il le contient seulement).  
Ainsi, les espaces  $L^p$  pour  $1 < p < \infty$  sont réflexifs :  $((L^p)')' \simeq L^p$ .

##### 2. Densité. —

- Théorème : Pour  $1 \leq p < +\infty$ ,  $C_c^0(X)$  est dense dans  $L^p(X)$  pour  $\|\cdot\|_p$ .
- Rem : Si une propriété reste vraie par passage à la limite en norme  $L^p$ , il suffit alors simplement de la vérifier sur des fonctions continues à support compact, voire plus régulières que cela.
- App : Inégalité de Hardy : Pour  $1 \geq p < \infty$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ , la fonction  $F(f) : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt$  est bien définie, et  $\|F(f)\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$ .
- App : L'opérateur de translation  $\tau_x : f(\cdot) \mapsto (f(x + \cdot))$  est continu dans tous les  $L^p$ .
- App : Les espaces  $L^p$  sont séparables pour  $1 \leq p < +\infty$ . (On approche avec des fonctions étagées à pentes rationnelles sur des subdivisions rationnelles pour avoir une suite dénombrable dense)
- Pro :  $L^\infty(X)$  n'est pas séparable sauf si  $\mu$  est portée par une sous-partie finie de  $X$ .
- Ex : Pour  $f_a(x) = \chi_{[0, \frac{1}{a}]}$ , on a  $\|f_a - f_b\|_\infty = 1 \text{ for } a, b > 0$ . On a ainsi un nombre non-dénombrable de boules ouvertes de rayon  $\frac{1}{2}$ , ce qui empêche la séparabilité.

– Pour  $\mathbb{R}$  muni de  $\lambda$  et  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ , les fonctions étagées sont denses dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $1 \leq p < \infty$ .

### 3. Le Hilbert $L^2$ . —

- Thm :  $L^2(X)$  est un espace de Hilbert pour  $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$ .
- Théorème de Riesz : Pour toute forme linéaire continue sur  $L^2(X)$ , il existe  $g \in L^2(X)$  tel que  $\forall f \in L^2(X), F(f) = \langle f, g \rangle$ .
- Rem : Contrairement au résultat pour tout  $1 < p < \infty$ , le produit scalaire de  $L^2$  permet de montrer ce résultat bien plus facilement.
- Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit  $C$  un convexe fermé. Alors pour tout  $f \in L^2(X)$  il existe un unique  $p(f) \in C$  tel que pour tout  $g \in C$  on ait :  $\langle f - p(f), p(f) - g \rangle \leq 0$ .
- Ex : Problème des moindres carrés.
- Rem : Les propriétés d'espace de Hilbert (orthogonalité, projection sur un convexe fermé, supplémentaire orthogonal, famille orthogonale, convergence faible) permettent de faciliter la démonstration de problèmes portant sur les  $L^p$ .
- **Dev** : Théorème de Grothendieck : Soit  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  un espace probabilisé et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $L^\infty(X)$  fermé pour  $\|\cdot\|_p$  pour un  $1 \leq p < +\infty$ . Alors  $F$  est de dimension finie.

### 3. Applications diverses des espaces $L^p$ . —

#### 1. Convolution. —

- Def : Pour  $f, g$  boréliennes positives, on définit  $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)d\lambda(y) \in [0, +\infty]$ .
- Pro : Si ces quantités sont finies, on a  $f * g = g * f$  et  $f * (g * h) = ((f * g) * h)$
- Inégalité de Young pour la convolution : Pour  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  et  $f \in L^p, g \in L^q$ , on a  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ .
- Rem : On peut aussi convoluer  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  avec  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ .
- Pro :  $L^1$  muni de  $*$  est donc une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.
- Pro :  $L^1$  ne possède pas d'unité.
- Pour  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L^p, g \in L^q, f * g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Def : Approximation de l'unité : Une suite  $(f_n)_n$  est appelée approximation de l'unité si :  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\lambda(x) = 1$ , si  $f_n \geq 0$ , et si  $\forall \varepsilon, \int_{|x| \geq \varepsilon} f_n(x)d\lambda(x) \rightarrow_n 0$ .
- Ex : Pour  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, f_n(x) = \frac{1}{n\pi}f(nx)$  est une approximation de l'unité.
- Pro : Pour  $(f_n)_n$  approximation de l'unité et  $g \in L^1, f_n * g \rightarrow_{\|\cdot\|_1} g$ .  
Si  $f_n \in L^q$ , cela est aussi vrai pour  $g \in L^p$  avec  $p = \frac{q}{q-1}$ .
- Pro : Régularisation par convolution : Pour  $f$  de classe  $C^k$  dans  $L^p$  et  $g \in L^q$  avec  $q = \frac{p}{p-1}$ , alors  $f * g$  est de classe  $C^k$  par théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La régularité de la convolée ne porte que sur la régularité d'un seul terme.
- Cor :  $C_c^\infty$  est dense dans  $L^p$ . (On convole une suite approchant  $f$  avec une approximation de l'unité qui soit  $C_c^\infty$ )

#### 2. Transformée de Fourier. —

- Def : Pour  $f \in L^1, \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)dy$ .
- Pro :  $\widehat{f}$  est uniformément continue et bornée par  $\|f\|_1$ .
- Ex : Pour  $f = \chi_{[-a,a]}, \widehat{f}(x) = \frac{2\sin(xa)}{x}$   
Pour  $f(x) = e^{-|x|},$  on a  $\widehat{f}(x) = \frac{2}{(1+x^2)}$ .
- Thm :  $\widehat{f}(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . (Démontré avec la densité des fonctions  $C_c^1$ )
- Pro : On a  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ . La transformée de Fourier linéarise la convolution.
- Pro : Si  $x^k f(x) \in L^1$ , on a  $\widehat{f}(x) \in C^k$ , avec  $\widehat{f}^{(k)}(x) = (-i)^k \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} y^k f(y)dy$ .
- Def : Espace de Schwarz  $S(\mathbb{R})$  : Les fonctions  $f$  de classe  $C^\infty$  telles que  $x^k f^{(n)}(x) \in L^1 \forall n, k$ .
- Pro : Théorème d'inversion de Fourier : La transformée de Fourier est une bijection bicontinue sur  $S(\mathbb{R})$ , et on peut calculer son inverse.
- Rem : Ainsi, la transformée de Fourier est injective sur  $L^1$ .
- Théorème de Fourier-Plancherel : Pour  $f \in L^1 \cap L^2$ , on note  $P(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}$ . Alors  $P(f) \in L^2$  et  $\|P(f)\|_2 = \|f\|_2$ .  
L'application  $P$  se prolonge alors en une isométrie linéaire sur  $L^2$ . Cette isométrie est de plus bijective. On peut ainsi prolonger la transformée de Fourier en une application  $L^2 \rightarrow L^2$ .

#### 3. Les espaces de Hardy et de Bergman. —

- Ce sont des espaces de fonctions holomorphes auxquelles on rajoute des propriétés d'intégrabilité.
- **Dev** : L'espace de Bergman  $B^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D}) \text{ tq } f \in L^2(\mathbb{D})\}$  est un espace de Hilbert pour  $\|\cdot\|_2$ , dont une base orthonormée est la famille des  $e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}z^n$ .  
 $f \in Hol(\mathbb{D})$  est dans  $B^2(\mathbb{D})$  ssi pour  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  on a  $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$ . On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.  
L'espace de Bergman possède de plus un noyau de reproduction  $K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $k_z(\cdot) := \overline{K(z, \cdot)} \in B^2(\mathbb{D}) \forall z \in \mathbb{D}$  et tel que  $f(z) = \langle f, k_z \rangle \forall f \in B^2(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D}$ .
- Rem : Un espace de Hilbert de fonctions ayant un noyau de reproduction est entièrement caractérisé par celui-ci. Ainsi, on obtient beaucoup de propriétés sur  $B^2(\Omega)$  grâce à l'étude de son noyau de reproduction, qui a une forme simple ici. Par exemple, pour tout  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holom, l'opérateur  $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$  est bien défini et continu sur  $B^2(\mathbb{D})$ .
- On peut aussi définir  $B^p(\mathbb{D})$  pour  $1 \leq p < +\infty$  et ramener certaines études sur les  $B^p$  à une étude sur  $B^2$  afin de profiter de son caractère hilbertien.
- Pour  $\Omega$  un ouvert simplement connexe, on peut aussi définir  $B^p(\Omega)$  grâce à l'existence de  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  biholomorphismes. Cette définition est indépendante de  $\psi$ , et  $B^2(\Omega)$  va lui aussi être un espace de Hilbert à noyau de reproduction, avec un noyau de reproduction que l'on obtient à partir de celui de  $B^2(\mathbb{D})$ . On peut ainsi exporter des propriétés de  $B^2(\mathbb{D})$  vers  $B^2(\Omega)$ .

- Def : On définit  $H^2(\mathbb{D}) = \{\sum_n a_n z^n \text{ tq } (a_n)_n \in l^2(\mathbb{N})\}$  l'espace de Hardy du disque.
- Pro : L'espace de Hardy du disque est un espace de Hilbert pour  $\langle f, g \rangle = \sum_n a_n \cdot \overline{b_n}$ .  
On a de plus :  $\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1^-} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt)$ .  
Une base orthonormée de  $H^2(\mathbb{D})$  est  $z \mapsto z^n$ .
- Pro : C'est lui aussi un espace de Hilbert à noyau de reproduction pour  $K(z, w) = \frac{1}{1-z\overline{w}}$ .

### Références

- Briane, Pagès : I). Densité des fonctions étagées intégrables.  $L^2$  Hilbert. Convolution. Transformée de Fourier.
- Brézis : Théorème de Riesz-Fischer. Théorème de Riesz pour  $L^p$ , dualité. Densité de  $C_c^0$ , inégalité de Hardy, séparabilité.
- Hauchecorne : Contre-Exemple de séries ayant des problèmes.
- Zavidovique : Théorème de Grothendieck. (Dev)
- Bayen, Margaria : Espace de Bergman. (Dev)

---

May 9, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes