Leçon 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

1. Fonctions monotones.

— On se place ici sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. *Définition et premières propriétés.* —

- Définition d'une fonction monotone $f : I \to \mathbb{R}$, strictement monotone.
- Ex : $f(x) = ax + b$, $f(x) = 2^x$ sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- La combi lin à coeffs positifs de fonctions croiss est croiss. Si f croiss, -f décroiss. Si f croiss positive, 1/f décroiss. Si f,g croiss, $f \circ g$ aussi. Si f,g décroiss, $f \circ g$ croiss.
- Le produit de fonctions monotones n'est pas forcément monotone (ex : $f(x) = x * x$). Pareil pour l'inverse si f non-nulle. Croiss + décroiss = n'importe quoi.
- La fonction de répartition d'une v.a. réelle est croissante.

2. *Régularité et caractérisation des fonctions monotones.* —

- Pour $x_n \to x$ et f monotone, la suite $f(x_n)$ est convergente.
- Les fonctions monotones sont réglées.
- L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.
- ex : Pour $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ bijective, $u_n(x) := \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2^n} \text{ si } \varphi(n) < x \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$, et $f = \sum_{n \geq 0} u_n$, f est strict croiss sur $]0, 1[$ et discontinue en tout point rationnel.
- Une fonction monotone est continue ssi son image est un intervalle.
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone et continue, alors c'est un homéomorphisme sur son image.
- Si f de classe C^1, f monotone ssi $f' \geq 0$ ou $f' \leq 0$, avec stricte monotonie ssi l'ensemble des zéros de z' est d'intérieur vide.
- Les fonctions monotones sont dérivables presque partout (admis)

3. *Suites de fonctions monotones.* —

- Une limite simple de fonctions croiss est croiss.
- Ex : $f(x) = \sum_{n \geq 0} n.x^{2^n}$ est croiss sur $[0, 1[$.
- Théorèmes de Dini : Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f continue. Si la suite des f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.
- Ou bien, si les f_n sont des fonctions croissantes et f est continue, alors la convergence est uniforme.
- Contre-ex : $f_n(x) = 1 - x^n$ sur $[0, 1]$. Les f_n sont une suite croissante de fonctions croissantes qui cv simplement, mais leur limite n'est pas continue et la cv ne peut donc pas être uniforme.

4. *Fonctions à variations bornées.* —

- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est à variations bornées ssi il existe M tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \geq M$.
- Les fonctions monotones sont à variations bornées.
- Les fonction de $C^1([a, b], \mathbb{R})$ sont à variations bornées, et on a $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$ via Taylor-intégral à l'ordre 1 + le th des accroissements finis.
- Les fonctions à variation bornées sont la somme d'une fonct croiss et d'une fonct décroiss. Ainsi, $BV([a, b])$ est le $\mathbb{R}$-ev engendré par les fonctions monotones. (Poser $g(x) = V_a^x(f)$ et $h(x) = g(x) - f(x)$.
- Contre-ex : $f(x) = \left| \begin{array}{l} x.sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$ est continue sur $[0, 1]$ mais pas à variations bornées.

2. Fonctions convexes.

— Dans le cas général, on regarde $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}$-ev E : $\forall x, y \in U \ \forall \lambda \in [0, 1] \ \lambda.x + (1 - \lambda).y \in U$.

1. *Définitions et premières propriétés.* —

- Def de convexité, stricte convexité, forte convexité, concavité.
- Ex : une norme sur E, $< Ax, x >$ sur R^n pour $A \in S_n^{++}$, exp sur $\mathbb{R}$.
- La somme de fonct convexes est convexe, la limite simple aussi. Si f est convexe, -f est concave.
- Le produit de fonct convexes n'est pas forcément convexe ($f(x) = x^2.x$ non-convexe).
- (cas réel)La composée de fonct convexes n'est pas forcément convexe ($f(x) = (e^x)^2 - 1000e^x$ non-convexe)(sa dérivée seconde en 0 est strict négative)
- (cas réel) Si f continue, bijective sur son image, et convexe, alors f^{-1} est concave. Ex : exp et log.
- Def de la log-convexité. Une fonction log-convexe est convexe.
- Ex : exp et Γ. (admis) Γ est l'unique fonction log-convexe qui vaut 1 en 0 et tq $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

2. *Caractérisation des fonctions convexes.* —

- Une fonct cont est convexe ssi $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Contre-ex : Indicatrice de $\mathbb{Q}$.
- Propriété des 3 cordes. $x \in I - \{x_0\} \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante.
- Si f est differntiable sur U, alors pour $x, y \in U$, $D(f)$ est croissante sur $[x, y]$. Dans le cas réel, f' est croissante sur I.
- Les fonct convexes ne sont pas toutes différentiables, ex $|x|$.
- Si f est D^2 en x, alors sa hessienne est positive. Ex : $< Ax, x >$, $f(x) = x^4$.
- $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$ est fortement convexe ssi A définie positive, et on connaît la constante de forte convexité. Donc $< Ax, x >$ est coercive.

3. *Propriétés de régularité.* —

- f est convexe et concave ssi elle est affine
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe est majorée/minorée ssi elle est constante.
- Appli aux solutions non-nulles de $y" - q(x).y = 0$, elles sont convexes non-bornées.
- Une fonction convexe est continue dans toutes les directions.
- Une fonction convexe sur une boule de R^n est continue.
- (cas réel) Une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite en tout point.

- (cas réel) l'ensemble des points tq $f'_d \neq f'g$ est au plus dénombrable.
- Si f est convexe et dérivable alors f' est C^1.
- En dim n on a l'existence de dérivées partielles en tout point et une différentiabilité pp (admis)

3. Applications de la monotonie et de la convexité. —

1. Etude de suites et de séries. —

- Trucs sur la monotonie de suties récurrentes ??. Exemple du sinus, comparaison série-intégrale, application à la série harmonique.
- **Dev** : Processus de Galton-Watson.

2. Inégalités de monotonie. —

- cf : Rombaldi

3. Inégalités de convexité. —

- Inégalité arithmético-géométrique (via exp et ln)
- Inégalité de Young : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec égalité ssi $a^p = b^q$. (le cas p=q=2 se démontre polynômialement. le cas général se démontre avec l'inégalité arithmético-géométrique)
- Inégalité de Jensen : Pour $g : [0,1] \to]a,b[$ continue et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ convexe, $f(\int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(g(x))dx$. Donc pour X v.a. réelle intégrable, $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.
- Inégalité de Hölder : $\|fg\|_r \leq \|f\|_p.\|g\|_q$, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. (Vrai aussi pour $p = \infty$ et $q = 1$).
- Inégalité de Minkowski : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ Les L^p sont des evn et L^2 est préhilbertien.
- Si $f \in L^p \cap L^q$ alors $f \in L^r$ pour tout $p \leq r \leq q$.
- Lemme de Fatou : $\liminf(\int f_n) \leq \int \liminf(f_n)$. Les L^p sont complets pour $\|.\|_p$.

4. Optimisation. —

- Si f est convexe, tout min local est global. Si f admet des extrema et est strictement convexe, le minimum est unique. Si f est fortement convexe et continue, elle est coercive donc elle admet un unique minimum.
- Méthode du gradient à pas optimal/conjugué
- **Dev** : Optimisation dans un Hilbert : Soit H un espace de Hilbert, C une partie non-bornée de H, et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive, et convexe. Alors f admet un minimum sur C, et ce minimum est atteint sur une sous-partie connexe par arcs.

Références

Ramis-Deschamps-Odoux : Partie fonctions monotones.
Gourdon : Th de Dini, Partie sur les variations bornées, suites récurrentes monotones
Briane-Pagès : Inégalités de Hölder, Minkowski
Rombaldi : Fonctions convexes, régularité, Inégalités de monotonie
Hiriart-Urruty : $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$, Gradient à pas conjugué
Gonnord,Tosel : Différentiabilité pp d'une fonction convexe en dim n
Ciarlet : Optimisation dans un Hilbert (Dev)
Ouvrard : Processus de Galton-Watson (Dev)
Hauchecorne : Contre-exemples

May 9, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes