

Développement : Stirling par TCL

Référence : Orlaux X-ENS, Serge FRANCINO, page 166-167

Leçon : 224, 235, 261, 262, 264 et 266.

Lemme :

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de paramètres respectifs λ et μ , alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

De façon générale, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Démonstration du lemme. Soit $k \in (X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$. On détermine la loi de $X + Y$ par convolution discrète :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l, Y = k - l)$$

On utilise ensuite l'indépendance entre X et Y :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l) \mathbb{P}(Y = k - l) \\ &= \sum_{l=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \lambda^l \mu^{k-l} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \lambda^l \mu^{k-l} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du binôme de Newton. En résumé, $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Plus généralement, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. L'initialisation est évidente. On suppose alors que le prédicat est vrai à un rang n quelconque, i.e. $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$, et on montre qu'alors il est vrai au rang $n + 1$, i.e. $X_1 + \dots + X_{n+1} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1})$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par un calcul similaire à précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{n+1} = k) &= \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = l, X_{n+1} = k - l) \\ &= \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = l) \mathbb{P}(X_{n+1} = k - l) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \sum_{l=0}^k e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^l}{l!} e^{-\lambda_{n+1}} \frac{\lambda_{n+1}^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1})} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^l \lambda_{n+1}^{k-l} \end{aligned}$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1})} \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1})^k}{k!}$$

L'hérédité est bien vérifiée. Le prédicat étant aussi vrai au rang 1, il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par le principe de récurrence. $\square$

Théorème : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Démonstration. Considérons $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose les variables aléatoires suivantes :

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad Z_n := \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

Ainsi définie, S_n suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$ d'après le lemme suivant.

Les X_i étant indépendantes, identiquement distribuées et de carré intégrable, le théorème central limite assure que :

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{V}(X_1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Puisqu'ici X_1 suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, on a $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{V}(X_1) = 1$, d'où :

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

Une façon de caractériser la convergence en loi passe par les fonctions de répartition : on a convergence en loi si et seulement si F_{Z_n} converge simplement vers F_Z en tout point de continuité. Ici, notre variable limite suit la loi normale qui admet une densité continue sur $\mathbb{R}$. On a ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Z_n \leq t) \longrightarrow \mathbb{P}(Z \leq t)$$

On en déduit, pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n \geq t) \longrightarrow \mathbb{P}(Z \geq t).$$

En effet, on a pour $\varepsilon > 0$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n > t + \varepsilon) \geq \mathbb{P}(Z_n \geq t) \geq \mathbb{P}(Z_n > t)$$

En passant à la limite, on obtient

$$\mathbb{P}(Z > t) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \mathbb{P}(Z > t + \varepsilon)$$

Or, la variable aléatoire Z est à densité donc sa fonction de répartition est continue, on en déduit

$$\mathbb{P}(Z \geq t) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \mathbb{P}(Z \geq t + \varepsilon)$$

Puis en passant à la limite quand ε tend vers 0, on obtient :

$$\mathbb{P}(Z \geq t) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \mathbb{P}(Z \geq t)$$

Ainsi on a le résultat voulu.

On va alors s'intéresser à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) dt$.

La première étape consistera en l'utilisation du théorème de convergence dominée. Nous venons d'établir la convergence simple, reste à voir l'hypothèse de domination. Soit $t > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \mathbb{P}(Z_n^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{t^2}$$

par inclusion des événements $\{Z_n \geq t\} \subset \{Z_n^2 \geq t^2\}$ et par l'inégalité de Markov.

Par la formule de König-Huygens, il vient :

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{V}(Z_n) + \mathbb{E}(Z_n)^2 = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n} - 0$$

Or $S_n \sim \mathcal{P}(n)$, donc $\mathbb{E}(S_n) = n$ et $\mathbb{V}(S_n) = n$. On a finalement $\mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \frac{1}{t^2}$ pour tout $t > 0$.

On a ainsi une majoration par une fonction intégrable en $+\infty$, mais absolument pas en 0 (où elle diverge). Pour résoudre ce problème, on va majorer notre terme sur $[0, 1]$ et $]1, +\infty[$ séparément grâce à des fonctions indicatrices.

Sur $[0, 1]$, l'astuce consiste à majorer brutalement $\mathbb{P}(Z_n \geq t)$ par 1 (puisque c'est une probabilité), fonction qui est bien intégrable sur $[0, 1]$. En résumé, on a la majoration intégrable suivante, valable pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(Z_n \geq t) \leq \mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{t^2} \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(t)$$

Cette domination nous permet de conclure, à l'aide du théorème de convergence dominée, que :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq t) dt$$

C'est alors le calcul de ces deux intégrales qui nous permettra de conclure.

Commençons par celle de droite. La variable Z suit une loi normale centrée réduite, donc par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq t) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\int_0^u dt \right) du \quad (\text{par Fubini-Tonelli}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à la seconde intégrale. Toujours par le théorème de transfert (avec la loi discrète de S_n) :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{nt} + n) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbf{1}_{\{k \geq \sqrt{n}t+n\}} dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{t \leq \frac{k-n}{\sqrt{n}}\}} dt \quad (\text{par Fubini-Tonelli})^1
\end{aligned}$$

Puisque $t \geq 0$, l'intégrale n'est non nulle que si $k > n$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) dt &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-n} \frac{n^k}{k!} \int_0^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}} 1 dt \\
&= e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \frac{(k-n)}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{(k-1)!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} \right)
\end{aligned}$$

Par décalage d'indice ($j = k - 1$) sur la première somme, on obtient une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{n^{j+1}}{j!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} \right) \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \frac{n^{n+1}}{n!} = \frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!}
\end{aligned}$$

En regroupant toutes ces informations par passage à la limite, il vient :

$$\frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Ce qui se réécrit bien sous la forme :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

□

1. En effet, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ avec m la mesure de comptage étant σ -finie, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour des fonctions positives.