

Développement : Fonction de Hermite

Référence : Thèmes pour l'agrégation de mathématiques, Mohamed HOUKARIE, pages 514 - 519 et Calcul intégral, Jacques FARAULT, pages 129-137

Leçon : 209, 213, 234, 245 et 250.

On rappelle que l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure d'espace hilbertien à l'aide du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Dans cet espace, il existe une famille de fonctions appelées fonction de Hermite.

Définition :

On définit le n-ème polynôme d'Hermite : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n : x \rightarrow (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Proposition :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$. On en déduit en particulier les points suivants :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant égal à 2^n .
2. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H'_n = 2nH_{n-1}$.

Démonstration. Je ne fais pas la preuve pour l'oral ! (par manque de temps)

□

Remarque : on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

Définition :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la n-ième fonction de Hermite par

$$h_n : x \rightarrow H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Proposition :

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a

- si $m \neq n$, alors $\langle h_n, h_m \rangle = 0$
- si $m = n$, alors $\langle h_n, h_n \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

Démonstration. Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

- ★ Calcul de $\langle h_n, h_m \rangle$ avec $n \neq m$.

Le calcul s'effectue à l'aide d'une intégration par partie. On suppose par exemple $m < n$, le cas symétrique se traite de manière analogue. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned}\int_{-A}^A h_n(t) \overline{h_m(t)} dt &= \int_{-A}^A H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt \\ &= (-1)^n \int_{-A}^A \frac{d^n}{dx^n} (e^{-t^2}) H_m(t) dt\end{aligned}$$

En utilisant, une intégration par partie on obtient que

$$\int_{-A}^A h_n(t) \overline{h_m(t)} dt = (-1)^n \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-t^2}) H_m(t) \right]_{-A}^A - (-1)^n \int_{-A}^A \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-t^2}) H_m^{(1)}(t) dt$$

En réitérant le procédé encore $m - 1$ on obtient que

$$\int_{-A}^A h_n(t) \overline{h_m(t)} dt = [\text{termes de crochet}]_{-A}^A + (-1)^{n+m} \int_{-A}^A \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-t^2}) H_m^{(m)}(t) dt$$

On le polynôme H_m est de degré m donc $H_m^{(m)}(t) = 2^m m!$

Donc

$$\int_{-A}^A h_n(t) \overline{h_m(t)} dt = [\text{terme de crochet}]_{-A}^A + (-1)^{n+m} 2^m m! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (e^{-t^2}) \right]_{-A}^A$$

.

Les termes de crochets, non exprimés a par le premier tendent vers 0 quand A tend vers l'infini. Pour ce qui est de la dernière intégrale, comme $n > m \geq 0$, alors l'expression $\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (e^{-t^2})$ est de la forme $Q(t)e^{-t^2}$ où Q est une fonction polynomiale. Ainsi, pour A qui tend vers l'infini, l'intégrale tend vers 0.

Par conséquent,

$$\langle h_n, h_m \rangle = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A h_n(t) \overline{h_m(t)} dt = 0$$

★ Calcul de $\langle h_n, h_n \rangle$.

On reprend les mêmes intégrations par parties, pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{-A}^A |h_n(t)|^2 dt &= [\text{terme de crochet}]_{-A}^A + (-1)^{2n} 2^n n! \int_{-A}^A \frac{d^{n-n}}{dx^{n-n}} (e^{-t^2}) dt \\ &= [\text{terme de crochet}]_{-A}^A + (-1)^{2n} 2^n n! \int_{-A}^A e^{-t^2} dt\end{aligned}$$

On fait alors tendre A vers plus l'infini et on obtient que

$$\langle h_n, h_n \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

puisque l'on reconnaît l'intégrale de Gauss. □

Corollaire :

On en déduit que la famille $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de fonction dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Théorème :

La famille $\mathcal{B} = \left(\frac{h_n}{\|h_n\|} \right)$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Autrement dit, on a, pour tout $f \in L^2$

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f, h_n \rangle}{\|h_n\|^2} h_n \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Démonstration. On utilise que $\mathcal{B}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle f, \frac{h_n}{\|h_n\|} \right\rangle = 0$$

alors $f = 0$.

Soit $f \in L^2$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle f, \frac{h_n}{\|h_n\|} \rangle = 0$ alors en particulier

$$\langle f, h_n \rangle = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \langle f, h_n \rangle = 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité venant du fait que $(H_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ tout comme $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Considérons la transformée suivante de l'application $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$:

$$\tau : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itz} dt$$

définie sur $\mathbb{C}$.

En prenant $z \in \mathbb{R}$, on reconnaît la transformée de Fourier de la fonction $f_1 \in L^1$.

Cependant nous allons tout d'abord étudier cette fonction sur $\mathbb{C}$ et utiliser des résultats d'analyse complexe.

Voyons d'abord que τ est bien définie sur $\mathbb{C}$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui nous dit que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itz}| dt \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2t \operatorname{Im}(z)} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or $f \in L^2$ donc la première intégrale est fini. Quant à la deuxième, on a que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2t \operatorname{Im}(z)} dt = e^{-\operatorname{Im}(z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t - \operatorname{Im}(z))^2} dt < +\infty$$

qui nous permet de conclure.

Passons alors au critère holomorphe de τ , qui nous le verrons, nous permettra de dire beaucoup de choses. Pour montrer l'holomorphie, on va chercher à utiliser le théorème d'holomorphie.

Posons alors

$$g : (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mapsto f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itz}$$

et vérifions les hypothèses du théorème :

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $t \mapsto g(t, z)$ est mesurable car f l'est (et l'exponentielle également) ;
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z \mapsto g(t, z)$ est holomorphe car l'exponentielle l'est ;
3. Considérons un compact K de $\mathbb{C}$. Il existe $M > 0$ tels que pour tout $z \in K$, on a que $|\operatorname{Im}(z)| \leq M$. Soit $z \in K$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t, z)| \leq |f(t)|e^{-\frac{t^2}{2}}e^{t\operatorname{Im}(z)} \leq |f(t)|e^{-\frac{t^2}{2}}e^{|t|M}$$

qui est également intégrable (on peut le voir de nouveau grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz) et ne dépend pas de z .

On conclut alors, par le théorème d'holomorphie, que τ est holomorphe et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\tau^{(k)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}(-it)^k e^{-itz} dt$$

De plus, comme τ est holomorphe, elle est analytique et donc développable en série entière en 0 de rayon de convergence $d(0, \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}) = +\infty$,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \tau(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Or, d'après ce que l'on vient de voir et par hypothèse on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = 0.$$

Donc, $\tau \equiv 0$ sur $\mathbb{C}$.

Revenons alors à notre remarque sur $\mathbb{R}$. $\tau = \hat{f}_1$ est la transformée de Fourier de f_1 et $\tau \equiv 0 \in L^1$. Ainsi, comme la transformée de Fourier est injective sur L^1 , on a $f = 0$ dans L^1 .

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ d'où $f = 0$ dans L^2 .

On a donc que La famille $\mathcal{B} = \left(\frac{h_n}{\|h_n\|} \right)$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

□

Théorème :

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n \sqrt{2\pi} \langle f, h_n \rangle}{\|h_n\|^2} h_n \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Avant de passer à la démonstration rappelons juste une propriété a savoir sur le transformée de Fourier :

Proposition :

Soient f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier.

1. Si xf est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et sa dérivée $\hat{f}'$ est la transformée de Fourier de $-ixf$.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, et si sa dérivée f' est intégrable, alors la transformée de Fourier de f' est égale à $it\hat{f}$.

Démonstration. Par la remarque précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x). \quad (1)$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'_n(x) &= H'_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= 2xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - H_{n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ en utilisant 1} \\ &= xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - H_{n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ h'_n(x) &= xh_n(x) - h_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Ainsi, en passant à la transformée de Fourier dans 2 et utilisant la linéarité de la transformée de Fourier, on obtient : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{h_{n+1}}(\xi) = \widehat{xh_n}(\xi) - \widehat{h'_n}(\xi) \quad (3)$$

Or, en utilisant la proposition précédente, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{xh_n}(\xi) = i\widehat{h'_n}(\xi) \quad \text{et} \quad \widehat{h'_n}(\xi) = i\xi\widehat{h_n}(\xi).$$

Donc

$$\widehat{h_{n+1}}(\xi) = i\widehat{h'_n}(\xi) - i\xi\widehat{h_n}(\xi) = -i(\xi\widehat{h_n}(\xi) - \widehat{h'_n}(\xi)). \quad (4)$$

Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ la propriété suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \widehat{h_n} = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n.$$

Initialisation : Pour $n = 0$. On $h_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{h_0}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx \end{aligned}$$

Grace à la proposition précédente (encore !) on obtient que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} \left(\widehat{h}_0(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}} \right) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} (x+i\xi) dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{h}_0(\xi) = C e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Pour $t = 0$, on obtient

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{h}_0(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \sqrt{2\pi} h_0.$$

Par conséquent $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'équation 4 et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\widehat{h_{n+1}}(\xi) = -i(\xi \widehat{h_n}(\xi) - \widehat{h_n}'(\xi)) \quad (5)$$

$$= -i(-i)^n (\xi h_n(\xi) - h_n'(\xi)) \quad (6)$$

Puis, en utilisant 2, on obtient que

$$\widehat{h_{n+1}} = (-i)^{n+1} \sqrt{2\pi} h_{n+1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{h_n} = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n.$$

Posons pour $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{\langle f, h_n \rangle}{\|h_n\|^2} h_n.$$

On a par la linéarité de l'intégrale

$$\mathcal{F}(S_N) = \sum_{n=0}^N \frac{(-i)^n \sqrt{2\pi} \langle f, h_n \rangle}{\|h_n\|^2} h_n.$$

De plus par la formule de Parseval, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(S_N)\|_2 = \|\mathcal{F}(f - S_N)\|_2 = 2\pi \|f - S_N\|_2$$

Or d'après le théorème précédent on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - S_N\|_2 = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(S_N)\|_2 = 0.$$

On obtient donc le résultat voulue

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n \sqrt{2\pi} \langle f, h_n \rangle}{\|h_n\|^2} h_n \text{ dans } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

□