

Leçon 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Application à la résolution approchée d'équations.

On se place sur E un espace vectoriel réel normé.

On appelle suite récurrente d'ordre k une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n, \dots, u_{n-k+1})$, $\forall n \geq k$.

1. Généralités sur les suites récurrentes. —

Pro : Si f continue sur $I \subset E$ et si $u_n \rightarrow l \in I$, alors $f(u_n) = f(l)$.

Contre-ex : $f(x) = x + \chi_{\{0\}}(x)$. Pour $u_0 > 0$ on a $u_n \rightarrow 0$ mais $f(0) = 1 \neq 0$.

On suppose alors que $u_0 \in I$ avec I un fermé de E stable par f .

1. Suites réelles. —

- Méthode pour résoudre traiter des suites récurrentes d'ordre 1 : trouver un sous-intervalle stable par f , puis étudier f sur cet intervalle.
- Pro : Soit u_n suite récurrente d'ordre 1.
 - 1) Si f est croissante, u_n est monotone et son sens de monotonie est donné par $sgn(u_1 - u_0)$.
 - 2) Si f est décroissante, les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de monotonie opposés.
- Pro : Si u_n converge vers l et si f est continue en l , alors $f(l) = l$. Ainsi, si f est continue sur I et si $f(I) \subset [a, b]$ alors u_n récurrente et convergente $\Rightarrow u_n$ converge vers un point fixe de a .
- Ex : Pour $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$, on a $u_n \rightarrow 1$.
- Ex : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. Si u_n converge, sa limite est -1 ou 3 .
- Ex : $u_{n+1} = \cos(u_n)$
- Ex : $u_{n+1} = \sin(u_n)$
- Ex : $u_{n+1} = \cosh(u_n)$
- Ex : $u_{n+1} = \sinh(u_n)$
- Lemme de la grenouille : $I = [0, 1]$, $f : I \rightarrow I$ continue, $u_0 \in I$. Alors u_n converge ssi $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$.
- Contre-ex : $f(x) = 1 - x$ et $u_0 = 0$. alors $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 1$.

2. Suites vectorielles. —

- Pro : Soit $(u_n)_n$ suite récurrente d'ordre k dans E , $u_{n+1} = f(u_n, \dots, u_{n-k+1})$. Alors la suite $(v_n)_n$ de E^k définie par $v_n = (u_n, \dots, u_{n-k+1})$ est récurrente d'ordre 1 pour $g((x_1, \dots, x_k)) := (f(x_1, \dots, x_k), x_2, \dots, x_k)$.
Dans le cas où f est une application linéaire de $E^k \rightarrow E$ ($(u_n)_n$ est récurrente linéaire), g est alors une application linéaire ($(v_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 1). Pour $E = \mathbb{R}$, f est une forme linéaire donnée par un vecteur $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et g est la matrice compagnon associée à (x_1, \dots, x_k) .
- On peut ainsi toujours ramener l'étude d'une suite récurrente à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.

- Def : Equation caractéristique associée à une suite récurrente linéaire.
- Ex : En dimension 2 avec $X^2 - X - 1$.
- Rem : Il n'y a pas de méthode générale sinon.

3. Quelques exemples fondamentaux de suites récurrentes. —

- Sur un Ev : Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + B$. Converge ssi $B = 0$
- Suites géométriques : $u_{n+1} = A.u_n$ où A application linéaire.
- Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = \frac{A.u_n + B}{1}$. Si $A = Id$, u_n est arithmétique de raison 1. Si $Id - A$ est inversible, $v_n = u_n - B.(Id - A)^{-1}$ est géométrique de raison A , et $u_n = A^n(u_0 - B.(Id - A)^{-1}) + B.((Id - A)^{-1})$.
- Sur \mathbb{R} , $A = q \in \mathbb{R}$ et la suite converge si $|q| < 1$, diverge si $|q| > 1$. Sur \mathbb{R}^d , cela dépend des valeurs propres de A et du choix de u_0 .
- Sur \mathbb{R} : $(u_n)_n$ vérifie une récurrence homographique si $u_{n+1} = \frac{a.u_n + b}{c.u_n + d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Elle est bien définie si $u_n \neq \frac{-d}{c}, \forall n$.
- Pro : On considère l'équation $\frac{a.u_n + b}{c.u_n + d} = x \Leftrightarrow cx^2 - (a - d)x - b = 0$.
 - 1) Si l'équation a deux racines distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors on a $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \left(\frac{a - \alpha.c}{a - \beta.c}\right)^n \cdot \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$.
 - 2) Si l'équation a une racine double $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + \frac{c}{a - \alpha.c} \cdot n$.
- Ex : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, u_0 = 1$. L'équation associée est $x^2 = 0$, donc $\frac{1}{u_n} = 1 + n$, càd $u_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.

2. Suites récurrentes et points fixes. —

On suppose maintenant que E est en plus complet.

1. Théorème du point fixe de Picard-Banach et applications. —

- Théorème du point fixe de Picard-Banach : Pour F un fermé de E et $f : F \rightarrow F$ qui est k -Lipschitzienne, $k < 1$, f admet un unique point fixe s dans F et toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers s .
On a même : $|u_{n+1} - s| \leq k|u_n - s| \leq k^{n+1}|u_0 - s|$. (vitesse de convergence linéaire)
- Cor : Le théorème est aussi vrai ssi il existe un n tq $f \circ \dots \circ f$ est k -Lipschitzienne.
- App : Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec I un intervalle de \mathbb{R} et un ouvert de $U \subset \mathbb{R}^n$, localement Lipschitz en sa seconde variable, et soit $(t_0, x_0) \in I \times U$.
Alors il existe (Y, J) où J est un intervalle inclus dans I et $Y \in C^1(J, U)$ avec $\forall t \in J, Y'(t) = F(t, Y(t))$ et $Y(t_0) = x_0$. (solution du problème de Cauchy de l'ED associée à F) De plus, pour (f, J_1) et (g, J_2) solutions du problèmes de Cauchy, $f \equiv g$ sur $J_1 \cap J_2$.
- Théorème avec le compact.
- Contre-ex : $f(x) = \frac{x}{2}$ sur $]0, 1[$ non fermé.
- Contre-ex : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $[0, +\infty[$ est 1-Lipschitz.
- App : Pour $\varphi(x) = x - c f(x)$, $c \neq 0$, on a $\varphi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$. On peut alors faire varier c et l'intervalle I pour essayer de rendre φ k -Lipschitzienne afin de pouvoir approximer son point fixe, et ainsi approximer un zéro de f .

2. Classification des points fixes. —

- Sur \mathbb{R} :
- Classification des points fixes. Si f est C^2 alors on peut facilement exprimer les vitesses de convergence/divergence dans chaque cas, ainsi que la superattractivité.
- Ex : Cas critique
- Ex : Equivalent donnant la vitesse de convergence pour $f(x) = \sin(x)$. Celle-ci est basse.
- Quelques dessins pour $\sqrt{1+x}$, x^2 , $e^{2x} - 1$.
- Méthode des petits pas : Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ avec un $DL(0)$ de la forme : $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$ avec $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$.
Si $u_0 \in [0, \eta]$ pour η assez petit et si $\gamma := \frac{(1+p)\alpha^2}{2} - \beta \neq 0$, alors la suite récurrente $(u_n)_n$ vérifie : $u_n = \frac{1}{\sqrt[pn]{\alpha}} - \frac{\gamma}{p^2 \alpha^2 \sqrt[pn]{\alpha}} \cdot \frac{\log(n)}{n \sqrt[pn]{\alpha}} + o(\frac{\log(n)}{n \sqrt[pn]{\alpha}})$.
- Exemple sur $f(x) = \sin(x)$.
- **Dev** : Processus de Galton-Watson : Soient $X_{n,k}$ des v.a iid de loi discrète sur \mathbb{N} , intégrables. On définit la suite de v.a. (Z_n) par $Z_0 := 1$ et $Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}$. Alors la probabilité d'extinction $a := P(\{\text{exists } n \text{ tq } Z_n = 0\})$ vaut 1 si $E[X_{0,0}] < 1$ ou si $P(X_{0,0} = 1) = 1$ et est dans $[0, 1[$ si $E[X_{0,0}] \geq 1$ et $P(X_{0,0} = 1) < 1$.
On peut de plus approcher cette probabilité avec la suite récurrente $u_0 = P\{X_{0,0} = 0\}$ et $u_{n+1} = E(u_n^{X_{0,0}})$.
- Appli à Galton-Watson
- Sur \mathbb{R}^n :
- Théorème avec le rayon spectral.
- La superattractivité a encore lieu si $f'(a) = 0$.

3. Application aux orbites de suites. —

- Def : Orbite de suite
- Ex : $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$
- Def : Si on a $f_{(n)}(x) := f \circ \dots \circ f(x) = x$ pour un $n \geq 1$ et $f_{(k)}(x) \neq x$ pour tout $0 < k < n$, alors x est n -périodique pour f .
- Théorème de Sarkowski : Si $f : I \rightarrow I$ est continue, avec I intervalle, et admet un point 3-périodique, alors elle admet des points n -périodiques pour tout $n > 1$.

3. Méthodes numériques itératives à un pas. —

1. Méthode de Newton. —

- Def+Pro : On dit que u_n converge quadratiquement vers s ssi il existe $0 < M < \min(1, \frac{1}{|u_0-s|})$ tel que $|u_{n+1} - s| \leq M \cdot |u_n - s|^2$.
On a alors $|u_n - s| \leq \frac{M^{2^{n+1}}}{M} \cdot |u_0 - s|^{2^n} \leq M^{2^n} \frac{(M|u_0-s|)^{2^n}}{M}$.
- **Dev** : Méthode de Newton polynomiale : Pour P un polynôme réel à racines réelles simples $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$, la fonction $\Phi : x \in [\lambda_r, +\infty[\mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \in [\lambda_r, +\infty[$ est bien définie.

Pour tout $x_0 \in [\lambda_r, +\infty[$, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ converge linéairement vers λ_r et quadratiquement à pr.

- App : Cela permet d'approcher rapidement des zéros de polynômes comme $x^2 - a$. Si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $x_n \in \mathbb{Q}$.
- Rem : La méthode de Newton peut être appliquée à des fonctions $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec U ouvert de \mathbb{R}^n pour lesquelles on a $x \in U$ tel que $\varphi(x) = 0$, φ est de classe C^2 sur U , et $D(\varphi)_x$ inversible.
Il existe alors un voisinage V de x sur lequel $\Phi : x \in V \mapsto x - (D(\varphi)_x)^{-1}(\varphi(x)) \in V$ est bien définie, et pour tout $u_0 \in V$, $u_{n+1} = \Phi(u_n)$ va converger quadratiquement vers x .
- Rem : Dans le cas réel avec $U =]a, b[$, on a des cas particuliers où le voisinage V est d'une forme plus commode.
- Rem : Cela permet d'approcher des points fixes répulsifs.

2. Méthode du gradient. —

- But : On remplace la recherche de la solution à $Ax = b$ par la recherche d'un minimum local à la fonction $\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$, pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Lemme de Kantorovich
- Méthode du Gradient à pas optimal
- Rem : On a aussi la méthode du gradient à pas conjugué.

3. Résolution de systèmes linéaires. —

- Méthode de résolution d'un système linéaire
- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Siedel
- Def : Relaxation. Intervalle de convergence.
- Pro : Cela ne converge pas quand le rayon spectral est > 1 .

Références

Gourdon : Suites récurrentes, méthodes. Equation caractéristique pour la récurrence linéaire. Suites arithmétiques, géométriques. Suites homographiques. Th du point fixe itéré.

Rouvière : Exemple pour sin,cos,ch,sh. Th du point fixe de Picard. Dessins pour des points fixes. Méthode de Newton Polynomiale (Dev)

Ouvrard : Processus de Galton-Watson (Dev).

Francinou, Gianella (Analyse 1) : Lemme de la grenouille. Orbite de suites, th de Sarkowski.

Demailly : Classification des points fixes. Méthode de la sécante.

Hiriart-Urruty : Lemme de Kanorovitch, Gradient à pas optimal.

Rombaldi : Méthode des petits pas. Résolution de systèmes linéaires.

Hauchecorne : Contre-Exemples de suites ayant des problèmes.

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes