

Développement : Les nombres de Bell

Référence : Carnet de voyage en Analystan, Caldero page 98-101

Leçon : 190, 230, 241 et 243.

Théorème :

Pour tout entier n , on note D_n le nombre de partition de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec convention que $D_0 = 1$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

Démonstration. La démonstration est découpé en plusieurs étapes.

★ **Étapes n°1 :** Détaillons d'abord D_n pour les cas $n = 1, 2, 3$

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire
- Pour $n = 2$, les partitions de l'ensemble $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ sont

$$\{\{1\}, \{2\}\} \quad \text{et} \quad \{\{1, 2\}\}$$

ce qui donne $D_2 = 2$.

- Pour $n = 3$, les partitions de l'ensemble $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ sont

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{2\}, \{1, 3\}\} \quad \text{et} \quad \{\{3\}, \{1, 2\}\}$$

ce qui donne $D_3 = 5$.

★ **Étapes n°2 :** Soit $n \geq 3$.

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère à présent l'ensemble E_k des partitions de pour lesquelles la partie qui contient $n + 1$ est de cardinale $k + 1$.

On regarde cette phrase dans les yeux et l'on trouve que

$$\text{card}(E_k) = \binom{n}{k} D_{n-k}.$$

En effet, pour constituer la partie contenant $n + 1$, il faut choisir k éléments dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, puis réaliser une partition des $n - k$ éléments restantes !!

De plus, comme les $(E_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forment une partition de l'ensemble des partition de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, on obtient la formule :

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^n \text{card}(E_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} D_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_j.$$

★ **Étapes n°3 :** Majoration de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On va démontrer par récurrence forte sur $\mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$P(n) : \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad D_k \leq k!.$$

Initialisation : elle est vraie pour $n \leq 3$ d'après l'étapes n°1.

Hérédité : Soit $n \geq 3$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Par l'étapes n°2 on que :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leq n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \\ &\leq n! \\ D_{n+1} &\leq (n+1)! \end{aligned}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie. Et emballez, c'est pesé !

★ **Étapes n°4** : Série génératrice exponentielle de la suite (D_n) .

La série génératrice exponentielle de la suite (D_n) est définie pour $z \in]-R, R[$ (où R est le rayon de convergence) par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n.$$

Par l'étapes n°3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\frac{D_n}{n!} \leq 1$. On en déduit donc que le rayon de convergence R de la série entière est $R \geq 1$.

Soit $z \in]-R, R[$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}.$$

La fonction f est dérivable sur $] -R, R[$ et l'on a

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{n!} z^n.$$

Au vus de la formule trouvé à l'étapes n°2, on en déduit que pour tout $z \in]-R, R[$,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n.$$

On a le produit de Cauchy des séries

$$\sum \frac{D_n}{n!} z^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{z^n}{n!},$$

qui ont des rayon de convergence supérieur ou égal à R et la première a pour somme $f(z)$ et la deuxième e^z .

On a donc pour $z \in]-R, R[$,

$$f'(z) = f(z)e^z.$$

On déduit que pour tout $z \in]-R, R[$,

$$f(z) = Ce^{e^z} \text{ pour } C \in \mathbb{R}.$$

Or $f(0) = D_0 = 1$ donc $C = e^{-1}$.

Finalement, on obtient, pour $z \in]-R, R[$,

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z}.$$

★ **Étapes n°5** : Nouvelle écriture en série entière de f .

La série entière définissant l'exponentielle ayant un rayon de convergence infini, on a pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{n!k!} = \frac{e^{|nz|}}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nz|}}{n!} = e^{e^{|z|}}.$$

La série double est donc sommable et par le théorème de Fubini

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!}.$$

★ **Étapes n°5** : Conclusion.

Par unicité du développement en série entière d'une fonction on obtient que

$$D_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

□