Leçon 208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

On se place sur E un $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\|.\|$ la norme sur E s'il n'y a pas d'ambiguités.

1. Généralités. —

1. Espaces vectoriels normés. —

- Def : Norme.
- Rem : $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance.
- Ex : $\mathbb{K}^n$ muni de $\sum_i |x_i|$, de $sup(|x_i|)$ ou de $\sqrt{\sum_i |x_i|^2}$. $C^0([0, 1], \mathbb{K})$ muni de $\|.\|_\infty$.
- Rem : La norme est 1-Lipschitzienne donc continue.
- Def : Equivalence de normes : $aN_1(.) \leq N_2(.) \leq bN_1(.)$
- Rem : Des normes équivalentes définissent la même topologie.
- Pro : Si deux normes définissent la même topologie sur E, alors elles sont équivalentes.
- Ex : Sur $\mathbb{K}^n$, $\|.\|_\infty \leq \|.\|_1 \leq n\|.\|_\infty$
- Contre-Ex : Sur $C^0([0, 1], \mathbb{K})$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, car on a des fonctions f_n tq $\|f_n\|_1 \leq 1$ et $\|f_n\|_\infty = n$.

2. Applications linéaires continues. —

- Def : On note $L(E, F)$ l'ensemble des applis lin de E vers F et $L_c(E, F)$ l'ensemble des applis lin cont.
- Pro : f linéaire est continue ssi f est continue en 0 ssi f est Lipschitzienne ssi Ker(f) est fermé.
- Rem : $L_c(E, F)$ est une algèbre munie de $+, ., \circ$.
- Pro : + et . sont linéaires continues en chaque variable.
- Def : Pour f une application linéaire continue, on note $\|f\| := sup_{\|x\|=1}(\|f(x)\|)$.
- Def : Sur $\mathbb{K}^n$ muni de $\|.\|_2$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ est linéaire continue, de norme 1.
- Pro : $\|.\|$ définit une norme sur $L_c(E, F)$, avec de plus $\|f \circ g\| \leq \|f\|.\|g\|$.
- Def : On note E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E, que l'on appelle aussi dual topologique de E.
- Pro : f est continue ssi elle transforme toute suite de limite nulle en une suite bornée.
- Contre-ex : Pour $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|P\| := sup_{[0,1]}(|P(x)|)$, $\varphi(P) := P(2)$ est linéaire mais non continue car $\varphi(x^n) \to +\infty$.
- Rem : $\|f\| = \inf(\{M > 0 \text{ tq } \|f(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in E\})$.
- Contre-ex : La norme d'une appli lin cont n'est pas forcément atteinte.
  Sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$, $\varphi : f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ est linéaire continue, de norme 1, mais il n'existe aucune fonction f continue de norme 1 telle que $|\varphi(f)| = 1$.
- Théorème de Hahn-Banach (admis) : Soit E un evn, F un s-ev de E et $f \in F'$. Alors il existe un prolongement linéaire continu g de f à E, tel que $\|g\|_{E'} = \|f\|_{F'}$.
- Appli : Soit F un s-ev de E. alors F est dense dans E ssi toute forme linéaire continue qui est nulle sur F est nulle sur E.
- Appli : E' sépare les points : Si $dim(E) \neq 1$, pour $x \neq y \in E$ il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x) \neq f(y)$.

3. Cas particulier de la dimension finie. —

- Thm : Dans un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
- Cor : Toute application linéaire d'un ev de dimension finie dans un evn est continue.
- Contre-ex : Ces deux résultats sont faut en dimension infinie. (cf exemples précédents)
- Cor : Dans un evn de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.
- Contre-ex : Faux en dimension infinie : Pour $C^0([0, 1])$ muni de $\|.\|_\infty$, $\overline{B(0, 1)}$ est un fermé borné mais n'est pas compact car on peut exhiber une suite n'admettant aucune extractrice convergente.
- Pro : Tout s-ev d'un ev de dimension finie est fermé.
- Théorème de Riesz : Un evn est de dimension finie ssi la boule unité fermée est compacte.

2. Espaces de Banach. —

1. Définitions et premières propriétés. —

- Def : Un espace de Banach est un evn complet pour la topologie induite par sa norme.
- Ex : Les $\mathbb{K}$-evn de dimension finie sont des espaces de Banach.
- Contre-ex : Pour $(\mathbb{Q}, |.|)$, $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension finie, mais il n'est pas complet car $\sum_n \frac{1}{n!}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Il faut que le corps de base soit complet.
- Pro : Si F est un espace de Banach, alors $L_c(E, F)$ est un espace de Banach.
- App : Ainsi, E' est toujours un Banach.
- App : Si E est un Banach, pour tout $u \in L_c(E, E)$ tq $\|u\| < 1$, $(Id - u)$ est inversible dans $L_c(E, E)$.
- Théorème de Riesz-Fischer : $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p, \|.\|_p)$ est complet.
- Théorème de prolongement d'applications uniformément continues sur une partie dense.
- Cor : Si l'application en question est linéaire continue, alors sa prolongée sera linéaire.
- App : Cela permet d'étendre la transformée de Fourier de $L^1 \cap L^2$ à L^2 tout entier.

2. Lemme de Baire et conséquences. —

- Lemme de Baire : Dans un espace de Banach, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- App : Densité des fonctions continues partout et nulle part dérivables.

- App : Un evn possédant une famille libre dénombrable telle que tout élément soit une combi lin des éléments de la famille n'est pas complet.
- Théorème de Banach-Steinhaus : Pour une suite $A \subset L_c(E,F)$ avec E un Banach. Soit $sup_A(\|f\|) \leq +\infty$, soit il existe une partie dense U de E sur laquelle $\forall x \in U$, $sup_A(\|f(x)\|) = +\infty$.
- App : Il existe des fonctions continues 2π-périodiques qui ne sont pas égales à leur série de Fourier.
- Théorème de l'application ouverte : Soient E,F des Banach et $f \in L_c(E,F)$ surjective. Alors f est ouverte : l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F.
- Théorème du graphe fermé : Soient E,F des Banach et $f \in L(E,F)$ si le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.
- **Dev** : Théorème de Grothendieck : Soit $(X, \mathbb{A}, \mu)$ un espace probabilisé et F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X)$ fermé pour $\|.\|_p$ pour un $1 \leq p < +\infty$.
  Alors F est de dimension finie.

3. Espaces de Hilbert. —

1. *Généralités.* —

- Def : Produit scalaire : forme sesqui-linéaire sur H hermitienne, définie positive.
- Def : Espace préhilbertien : espace vectoriel muni d'un produit scalaire
- Def : E est un espace de Hilbert ssi il est préhilbertien et complet pour la norme engendrée par son produit scalaire.
- Pro : Le produit scalaire induit une norme sur l'espace vectoriel. $N(x) = \sqrt{<x,x>}$.
- Pro : On a : $N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y) = Re(<x,y>)$ et $N^2(x+iy) - N^2(x) - N^2(iy) = Im(<x,y>)$.
- Pro : Identité du parallélogramme : $N^2(x+y) + N^2(x-y) = 2(N^2(x) + N^2(y))$
- Thm : Une norme provient d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.
- Thm : Inégalité de Cauchy-Schwarz : $| <x,y> | \leq N(x)N(y)$ avec égalité ssi $(x,y) est \mathbb{R} - liée$.
- App : Ainsi, pour $\Phi_y(x) := <x,y>$, $\|\Phi_y\| = N(y)$. L'application $y \in E \mapsto \Phi_y \in E'$ est donc une isométrie.
- Ex : $\mathbb{R}^n$ avec $<X,Y> := X^t.A.Y$, $L^2(X)$, $l^2(\mathbb{N})$ sont des espaces de Hilbert.
- Contre-Ex : $(C([0,1],\mathbb{K}), <.,.>_{L^2})$ n'est pas un espace de Hilbert car $x \mapsto x_n$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $C([0,1],\mathbb{K})$.
- Def : Orthogonalité $x \perp y \Leftrightarrow <x,y> = 0$.
- Def : Pour $A \subset E$, $A^\perp$. C'est un sous-ev de E.
- Pro : $A^\perp = (Vect(A))^\perp = (\overline{Vect(A)})^\perp$, et est toujours fermé.

2. *Applications linéaires sur un espace de Hilbert.* —

- Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C un convexe fermé. Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique $p(x) \in C$ tel que pour tout $y \in C$ on ait : $<x - p(x), y - p(x)> \leq 0$.
- Pro : On a $|p(x) - p(y)| \leq |x - y|$. L'application de projection est 1-Lipschitzienne, donc continue sur E.
- Pro : Si C est un s-ev fermé, alors p est linéaire, donc linéaire continue.
- Cor : Pour F un s-ev de E, $E = \overline{F} \oplus F^\perp$.
- Pro : Un espace F est dense dans E ssi $F^\perp = \{0\}$.
- Théorème de représentation de Riesz : Pour tout F forme linéaire continue sur E, il existe $y \in E$ tel que $\forall x \in E$, $F(x) = <x,y>$.
- App : Définition de l'adjoint d'une appli lin cont : A^* tq $\forall x,y \in E$, $<Ax,y> = <x, A^*y>$.
- Pro : Pour F s-ev fermé de E, la projection orthogonale sur F, p_F, est auto-adjointe : $p_F^* = p_F$.

3. *Bases Hilbertiennes.* —

- Def : Base hilbertienne.
- Rem : Différence avec les bases algébriques.
- Ex : $(e_n)_n$ est une base hilbertienne sur $l^2(\mathbb{N})$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Thm : Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède une base hilbertienne dénombrable.
- Cor : Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $l^2(\mathbb{N})$.
- App : Pour E Hilbert séparable, décomposition d'un élément dans une base hilbertienne (la suite des coeffs étant dans $l^2(\mathbb{N})$, donc convergence l^2.)
- Ex : Pour $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et $L^2(\mathbb{T})$ avec $<f,g> := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.
  La famille $e_n(t) := e^{int}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de l'espace.
- Pro : Pour toute $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} | <f, e_n> |^2$.
- Appli : Pour f $2-\pi$-périodique, paire, telle que $f(x) = \chi_{[0,\pi/2[} - \chi_{]\pi/2,\pi]}$ sur$[0,\pi]$, la formule de Parseval donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. *Les espaces de Hilbert à noyau de reproduction.* —

- Def : Soit X un ensemble et H un espace de Hilbert de fonctions de $X \to \mathbb{C}$. H est un espace de Hilbert à noyau de reproduction ssi il existe $K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tel que $k_z(.) := \overline{K(z,.)} \in B^2(\mathbb{D})$ $\forall z \in \mathbb{D}$ et tel que $f(z) = <f, k_z>$ $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$.
- Pro : Un espace de Hilbert de fonctions a un noyau de reproduction ssi les opérateurs d'évaluation $\delta_z : f \mapsto f(z)$ sont continus $\forall z \in X$.
- Théorème : Le noyau de reproduction caractérise l'espace de Hilbert : Si on se donne un noyau de reproduction K, alors il existe un unique $(H, \|.\|)$ hilbert de fonctions $X \to \mathbb{C}$ dont K est le noyau de reproduction.
- **Dev** : L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D})$ tq$f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{D})\}$ est un espace de Hilbert pour $\|.\|_2$, dont une base orthonormée est la famille des $e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}z^n$.
  $f \in Hol(\mathbb{D})$ est dans $B^2(\mathbb{D})$ ssi pour $f(z) = \sum_n a_n z^n$ on a $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$. On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.

L'espace de Bergman est un espace de Hilbert à noyau de reproduction. Son noyau de reproduction est $K_B(z,w) = \frac{\pi}{(1-z\overline{w})^2}$.

- Rem : Ainsi, on obtient beaucoup de propriétés sur $B^2(\Omega)$ grâce à l'étude de son noyau de reproduction, qui a une forme simple ici.
- Rem : On peut aussi définir $B^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p < +\infty$ et ramener certaines études sur les B^p à une étude sur B^2 afin de profiter de son caractère hilbertien.
- Pour Ω un ouvert simplement connexe, on peut aussi définir $B^p(\Omega)$ grâce à l'existence de $\psi : \mathbb{D} \to \Omega$ biholomorphismes. Cette définition est indépendante de ψ, et $B^2(\Omega)$ va lui aussi être un espace de Hilbert à noyau de reproduction, avec un noyau de reproduction que l'on obtient à partir de celui de $B^2(\mathbb{D})$. On peut ainsi exporter des propriétés de $B^2(\mathbb{D})$ vers $B^2(\Omega)$.
- Def : On définit $H^2(\mathbb{D}) = \{\sum_n a_n z^n \text{ tq } (a_n)_n \in l^2(\mathbb{N})\}$ l'espace de Hardy du disque.

- Pro : L'espace de Hardy du disque est un espace de Hilbert pour $< f, g >= \sum_n a_n.\overline{b_n}$.
  Une base orthonormée de $H^2(\mathbb{D})$ est $z \mapsto z^n$, et il est lui aussi un espace de Hilbert à noyau de reproduction pour $K_H(z,w) = \frac{1}{1-z\overline{w}}$.

- Pro : On peut injecter $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Pour P_B et P_H les projecteurs orthogonaux de $L^2(\mathbb{D})$ sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$, on a : $P_B(f)(z) =< f, \overline{K_B(z,.)} >$ et $P_H(f)(z) =< f, \overline{K_H(z,.)} >$, $\forall f \in L^2(\mathbb{D})$, $\forall z \in \mathbb{D}$.
- Thm : Dans un espace de Hilbert de fonctions à noyau de reproduction, si un opérateur de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ est bien défini, alors il est continu.
- Thm : Pour tout $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe, $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $f \circ g \in B^2(\mathbb{D})$. Idem pour $H^2(\mathbb{D})$.

Références

Gourdon : Ev normés, applis lin cont, cas de la dim finie.Def de Banach. Lemme de Baire.
Pommellet : Normes équivalentes. Prop sur les applis lin cont. Prolongement d'une fonct UC sur une partie dense.
Brézis : Hahn-Banach analytique. Th de Riesz-Fischer. Th de Banach-Steinhaus.
Hauchecorne : Contre-Exemples d'ev non complets et d'appli lin pas continues.
Zavidovique : Théorème de Grothendieck. (Dev)
Bayen, Margaria : Espace de Bergman. (Dev)

May 9, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes