Dual de Pontryagin de sg de $\mathbb{U}$

<u>Thm</u> : Soit G un sg infini de $\mathbb{U}$. Les seuls mph C^0 de $G \longrightarrow \mathbb{U}$ sont les $z \longmapsto z^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

ie : $\mathrm{Hom}_{C^0}(G, \mathbb{U}) = \mathbb{Z}$

1] <u>Cas où $G = \mathbb{U}$</u> :

Soit $f : G \to \mathbb{U}$ un mph C^0 et $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(e^{it})$

g est C^0. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_x^{x+a} g$

F est C^1.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_x^{x+a} g = g(x) \int_0^a g$

$a \longmapsto \int_0^a g$ est de dérivée non nulle $(g(0) = 1)$

et est donc non nulle. Soit $a \in \mathbb{R}$ tq $A := \int_0^a g \neq 0$

alors $g = A^{-1} . F$ est C^1.

- $\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad g(s+t) = g(s)\, g(t)$ donc

$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad g'(t+s) = g'(s)\, g(t)$

et $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = g'(0)\, g(t)$.

donc $\exists \alpha \in \mathbb{C}, \begin{cases} g(t) = e^{\alpha t} \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad (g(0) = 1)$

et $\forall t \in \mathbb{R}, \ |g(t)| = 1 \implies \alpha \in i\mathbb{R}$

$g(2\pi) = g(0) = 1 \implies \alpha \in i\mathbb{Z}$, et f est bien de la forme souhaitée.

2] <u>Un mph C^0 de $G \to \mathbb{U}$ est uniformément C^0.</u>

Soit f un tel mph. et $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0, \forall x \in G$,

$|x - 1| \leq \delta \implies |f(x) - 1| \leq \varepsilon$.

Soit $z \in G$, si $|x - z| \leq \delta$ alors $|xz^{-1} - 1| \leq \delta$ donc

$|f(x) f(z^{-1}) - 1| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - f(z)| \leq \varepsilon$: f est UC.

3) Bilan :

G étant infini dans $\mathbb{U}$, il y est dense,

Soit $f : G \to \mathbb{U}$ un mph C^0. f est UC via 2).

$\mathbb{U}$ étant complet, f se prolonge en une unique application $\tilde{f}$ sur $\mathbb{U}$, qui est C^0.

$\tilde{f} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ est un mph. en effet :

$(x,y) \in \mathbb{U}^2 \longmapsto \dfrac{\tilde{f}(x+y)}{\tilde{f}(x)\tilde{f}(y)} \in \mathbb{U}$ est constante valant 1

sur la partie dense $G \times G$ de $\mathbb{U}^2$. Elle vaut 1 partout par continuité.

$\tilde{f}$ est un mph C^0 de $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$, c'est donc une puissance k-ième, et donc f l'est aussi.