

Leçon n° 181:

Convexité dans \mathbb{R}^n .

Applications en algèbre et en géométrie.

• Références:

→ Combes: "Algèbre et Géométrie"

→ Gardon: "Algèbre"

→ Rombaldi: "Mathématiques pour l'agrégation: Algèbre et géométrie"

→ Hassam: "Topologie générale et espace normé"

→ Isemmann, Reuth: "L'oral à l'agrégation de mathématique"

• Dév:

→ Isométries du Cube (Dev 26)

→ Suites de polygones (Dev 32)

I - Barycentres

- 1) Définition
↳ DEV: Suites de polygones
- 2) Coordonnées barycentriques

II - Convexité

- 1) Ensembles convexes
- 2) Enveloppes convexes
- 3) Liens Fonctions convexes

III - Points extrémaux et géométrie

- 1) Premiers résultats
- 2) Polygones et polyèdres convexes
↳ DEV: Isométries du Cube

Leçon n° 181

n° 181 Convexité dans \mathbb{R}^n . Applications en algèbre et géométrie.

Avant de parler de convexité, parlons de barycentre.

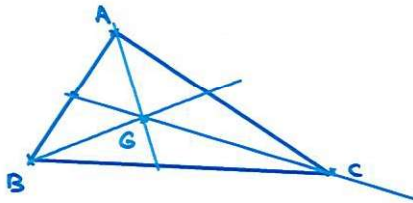
I- Barycentres

Quand nos étions petit et que nous souhaitons faire tenir un objet en équilibre, nous le tenions sans le savoir sur le point de gravité. Ce point est calculer en prenant en considération tout ce qui compose l'objet avec sa position et sa masse.

Def: position : A_i } $G = \text{bar} ((A_i, \lambda_i)_{i \in \{1, \dots, n\}})$ barycentre
 masse : λ_i

Par exemple pour un triangle, en prenant les points les sommets et de masses égales on obtient le isobarycentre du triangle : son centre de gravité

Ex :



On peut remarquer que si on aggrandit proportionnellement l'objet le point G est inchangé :

et de même il est Prop: homogénéité + associatif.

Par le fait de l'associativité, on peut s.q. $\sum \lambda_i = \lambda = 1$
 \rightsquigarrow on a les coord. barycentriques

D'ailleurs, notre premier développement sera de montrer que une suite de polygones converge vers l'isobarycentre des sommets

DEV1: Suite de polygones (Voir Annexe 2)

On peut se demander maintenant quel est le rapport avec la convexité

II- Convexité

* En fait on a Def: C convexe ssi tout barycentre positif de points pondérés de C reste dans C .
Par ex un triangle, un rectangle, une boule etc.

Prop: stable par intersection (Voir Annexe 4)

* Def: enveloppe convexe $co(X)$ de deux façons:
↳ comme \cap de toutes les parties convexe qui contiennent X
↳ comme l'ensemble des barycentres positifs obtenus en prenant les points de X

Par ex, par trois points on obtient le triangle.

* Résultats importants:

↳ Thm Carathéodory

↳ séparation : DEV2 : $co(O_n(\mathbb{R}))$

* Lien fct convexe : épi-graphe

Et mtn portons notre intérêt sur les polygones et polyèdres
Leurs sommets sont les points extrémaux.

III - Points extrémaux et géométrie

On a le fait qu'une application affine permute les pt extrémaux (prop 45) ce qui nous permet d'étudier les isométries de polyèdres et cela fera l'objet d'un développement: DEV3: Isométries du Cubes.

DEV4: pt extrémaux $B(O, 1)$
 $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$

Leçon n° 181: Convexité dans \mathbb{R}^n . Applications en algèbre et en géométrie

I- Barycentres
I-1) Définition

Notation 1: Soient E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} et E un espace affine sur E d'origine O . Soit $\mathbb{K} \in \mathbb{N}$

Soient $A_1, \dots, A_k \in E$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ et $f: E \rightarrow E$

$$f \mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{OA_i}$$

On pose $\vec{a} = f(O)$ et $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Remarque 2: $f(M) = \lambda \vec{OM} + \vec{a}$. Si $\lambda \neq 0$, il existe $G \in E$ unique tel que $f(G) = \vec{a}$ caractérisé par les assertions équivalentes suivantes:

- (i) $\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{GA_i} = \vec{0}$
- (ii) $(\sum_{i=1}^k \lambda_i) \vec{OG} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{OA_i}$

Définition 3: $(A, \lambda) \in E \times \mathbb{K}$ est appelé "point pondéré".

Définition 4: Soient $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)$ des points pondérés tels que $\lambda \neq 0$. Le point $G \in E$ caractérisé par (i) ou (ii), est appelé le barycentre de cette famille de points pondérés. Noté par: $\text{bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in \{1, \dots, k\}})$.

Remarque 5: G ne dépend pas de l'origine O choisie.

Exemple 6: Pour $A, B \in E$ distincts et $G = \text{bar}((A, 1-\lambda), (B, \lambda))$ où $\lambda \in]0, 1[$, on a G qui parcourt la droite affine (AB) . Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, l'ensemble des G est le segment $[AB]$.

Définition 7: Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k \neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre des points A_1, \dots, A_k .

Exemple 8: Par les notations de l'ex. 6, si $\lambda = \frac{1}{2}$, G est le milieu de $[AB]$.

Proposition 9: Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I} \in E \times \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$. Soit $I = \bigcup_{p=1}^r I_p$ une partition de I . Supposons que $\mu_p = \sum_{i \in I_p} \lambda_i \neq 0$ pour $p \in \{1, \dots, r\}$. $G_p = \text{bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I_p})$. Alors, le barycentre G de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est aussi le barycentre de la famille $(G_p, \mu_p)_{1 \leq p \leq r}$.

Remarque 10: Le barycentre est associatif et stable par homogénéité.

Proposition 11: Une application affine préserve les barycentres.

Exemple 12: L'isobarycentre d'un triangle est appelé le centre de gravité du triangle. (Voir Annexe 2)

Application 13: Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont z_1, \dots, z_k . On définit par récurrence une suite de polygones $(P_i)_{i \geq 0}$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{i+1} sont les milieux des arêtes de P_i .

Alors, la suite (P_i) converge vers l'isobarycentre de P .

(Voir Annexe 2)
I-2) Coordonnées barycentriques

Définition 14: On dit qu'une partie finie $X = \{A_1, \dots, A_k\}$ de E est affinement libre si pour tout point Π de ce sous-espace affine engendré par X , il existe un seul système $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de scalaires tel que $\lambda = 1$ et $\Pi = \text{bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k))$.

X est affinement liée, si elle n'est pas affinement libre.

X est affinement génératrice si le sous-espace affine de E engendré par X est égal à E .

X est un repère affine de E si X est affinement libre et génératrice. Dans ce cas; $\forall \Pi \in E, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ t.q. $\lambda = 1$ et $\Pi = \text{bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in \{1, \dots, k\}})$. On appelle ces scalaires les coordonnées barycentriques de Π dans X .

Remarque 15: Si on remplace $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ par des "masses" proportionnelles le barycentre reste le même : $\lambda = 1$ est un choix arbitraire.

Proposition 16: Pour qu'une partie $X = \{A_0, \dots, A_k\}$ de E soit une partie affinement libre / génératrice / repère affine de E , il faut et il suffit que $B = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}\}$ soit une famille libre / génératrice / base de E .

Application 17: $\dim E = n$. $P_0, \dots, P_n \in E$ sont affinement liés ssi le déterminant des coord. bary. de P_0, \dots, P_n est nul.

Théorème 18: (Ménélaüs)
Soient (A_0, A_1, A_2) repère affine de $E \simeq \mathbb{R}^2$, et $\Pi_i \in (A_i A_j), \forall i=1,2,0$

Alors, Π_0, Π_1 et Π_2 sont alignés ssi

$$1 = \frac{\Pi_0 A_2}{\Pi_0 A_1} \times \frac{\Pi_1 A_0}{\Pi_1 A_2} \times \frac{\Pi_2 A_1}{\Pi_2 A_0} \quad (\text{Voir Annexe 3})$$

II- Convexité À partir d'ici $K = \mathbb{R}$.

II-1) Ensembles convexes

Lemme 19: Soit $C \in E$. On a équivalence entre:

- (1) tout barycentre de points pondérés de C rest dans C ;
- (2) $\forall \Pi \in C, \forall \Pi' \in C, [\Pi \Pi'] = \{ \Pi + \lambda \Pi' ; \lambda \in [0,1] \} \subset C$.

Définition 20: Si C partie de E vérifie (1) ou (2) elle est dite convexe. (Voir Annexe 4)

Convention: \emptyset convexe.

Exemple 21: les intervalles de \mathbb{R} et l'ensemble des matrices symétriques sont convexes.

Proposition 22: C partie convexe $\Rightarrow C$ convexe par arcs

Proposition 23: La convexité est stable par intersection.
 (Voir Annexe 4)

Proposition 24: Si f est une application affine de E dans E' un autre espace affine, l'image $f(C)$ de toute partie convexe de C de E est convexe et l'image réciproque $f^{-1}(C')$

de toute partie convexe C' de E' est convexe.

Exemple 25: La boule unité est convexe.

Remarque 26: L'image d'un convexe par une application continue n'est pas forcément convexe.

Proposition 27: Si C convexe, alors \bar{C} et C° sont convexes.

II-2) Enveloppes convexes

Proposition 28: Soit $X \subset E$ et $X \neq \emptyset$. L'intersection $co(X)$ de toutes les parties convexes de E qui contiennent X est la plus petite partie convexe de E qui contient X . De manière équivalente, c'est l'ensemble des barycentres positifs obtenus en prenant des points dans X . (Voir Annexe 5)

Définition 29: On appelle $co(X)$ l'enveloppe convexe de X .

Exemple 30: Si $X = \{A, B\}$ avec $A \neq B$, $co(X) = [A, B]$,

si $X = \triangle A'B'C'$, alors $co(X) = \text{triangle } A'B'C'$ bords compris.

Proposition 31: f application affine. Alors, $f(co(X)) = co(f(X))$.

Théorème 32: (Gauss - Lucas)

Soit $PE \subset [X]$ de degré $d \geq 2$. Alors,

$\{ \text{racines de } P \} \subset co(\{ \text{racines de } P \})$
 et les barycentres racines de P' et P à chaque racine est affecté de poids correspondant à sa multiplicité coïncident.

Théorème 33: (Carathéodory)

Soit $X \subset E$ non vide et $\dim E = n$. Alors, tout point de $co(X)$ s'écrit comme barycentre positif d'au plus $n+1$ points de X .

Corollaire 34: Si X compact, alors $co(X)$ est compact.

II-3) Résultats de séparation

Théorème 35: (Projection sur un convexe fermé.) (Voir Annexe 6)

Soit C un convexe fermé non vide et $A \in E$. Alors, $\exists ! P$ point projeté de A sur C vérifiant $AP \perp d(A, C)$.

Théorème 36: (Hahn-Banach)

Soit C un convexe fermé et H un compact convexe tel que $C \cap H = \emptyset$. Alors, il existe un hyperplan affine séparant strictement C et H .

Application 37: $\text{co}(O_n(\mathbb{R}))$ dans $\Pi_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $\Pi_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\| \cdot \|_2$.

I-4) Liens fonctions convexes

Soit C une partie convexe de E où $\dim E = n$.

Définition 38: $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall M, N \in C$ et $\forall \lambda \in]0, 1[$, on a: $f(\text{bar}((M, 1-\lambda), (N, \lambda))) \leq (1-\lambda)f(M) + \lambda f(N)$.

On dit que f est strictement convexe. Si pour $\Pi \neq N$ et $\lambda \in]0, 1[$ on a l'inégalité stricte.

Proposition 39: f convexe ssi $\Omega_f := \{(M, t) \mid f(M) \leq t\}$ est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$ (épigraphe est convexe) (Voir Annexe 7)

Proposition 40: Si $f \in E^*$, f strictement convexe ssi Hessienne de f est définie positive.

Exemple 41: Le déterminant est log-convexe sur S_n^{++} .

III- Points extrémaux et géométrie

III-1) Premiers résultats

Lemme 42: Soit C une partie convexe de E et PEC . On a équivalence entre:

- (a) $\forall \Pi, NEC, P = \text{bar}(\Pi, 1/2), (N, 1/2) \Rightarrow \Pi = P = N$;
- (b) $\forall \Pi, NEC, \forall \lambda \in]0, 1[, P = \text{bar}(\Pi, 1-\lambda), (N, \lambda) \Rightarrow \Pi = P = N$;
- (c) Le complémentaire de $\{P\}$ dans C est convexe.

Définition 43: Un tel point P est appelé un point extrémal.

Proposition 44: • Si f est strictement convexe, alors tout point du graphe de f est un point extrémal de Ω_f .

• Si f est strictement convexe. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $G_t := \{M \in \Pi(M) \mid f(M) \leq t\}$ non vide. Alors, l'ensemble des points extrémaux de G_t

est: $E_t = \{\Pi \in E \mid f(\Pi) = t\}$. (Voir Annexe 8)

Proposition 45: Soit C convexe. Toute application affine $f: E \rightarrow E'$ telle que $f(C) = C'$ permute les points extrémaux de C c-a-d envoie un point extrémal sur un point extrémal (invariant) et réalise une bijection sur l'ensemble des points extrémaux.

III-2) Polygones et polyèdres convexes

Définition 46: • En dim 2, on appelle polygone l'intersection d'un nombre fini de demi-plans fermés. Ses points extrémaux sont appelés sommets.

En dim 3, de même et se sont des polyèdres.

Remarque 47: Ce sont des convexes, par la prop 23.

Proposition 48: Soit P un polygone (polyèdre) convexe, non aplati. L'ensemble G des applications affines f de E_2 (E_3) dans lui-même telle que $f(P) = P$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(E_2)$ (resp. $\text{Aut}(E_3)$). Tout $f \in G$ induit une permutation S_f de l'ensemble des sommets de P et $f: P \rightarrow S_f$ est un homéomorphisme injectif de G dans S_n .

Exemple 49: Pour $P = A_1 A_2 A_3$ un triangle dans E_2 , $G = S_3$ et si P est un tétraèdre, $G = S_4$.

Théorème 50: (Cauchy) (admis)

Dans E_3 , les cinq solides platoniciens sont les seuls polyèdres convexes réguliers. (Voir Annexe 9)

Application 51:

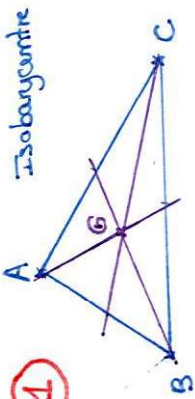
Soit le cube de sommet A_1, \dots, A_8 avec $A_i = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

$S := \{A_1, \dots, A_8\}$. Le groupe $\text{Is}(S)$ agit de façon transitive sur S . On a: $|\text{Is}(S)| = 48$ et $|\text{Is}^+(S)| = 24$.

De plus, $\text{Is}^+(S) \cong S_4$ et $\text{Is}(S) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (Voir Annexe 9)

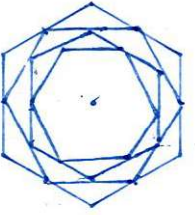
Leçon 18.1: Annexe

①



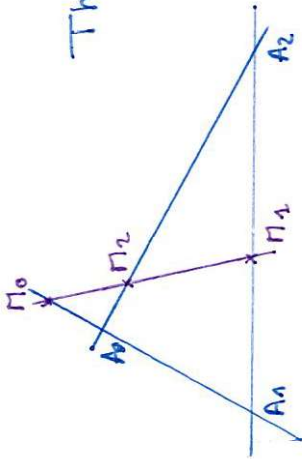
Isobarycentre

Suites de Polygone

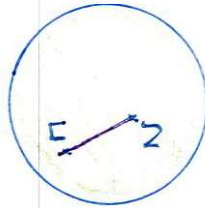


②

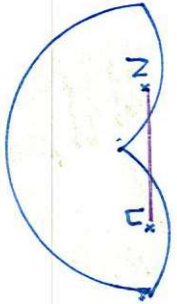
Théorème de Méhéné-Palais



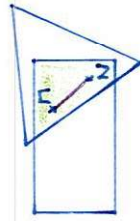
③



Convexe

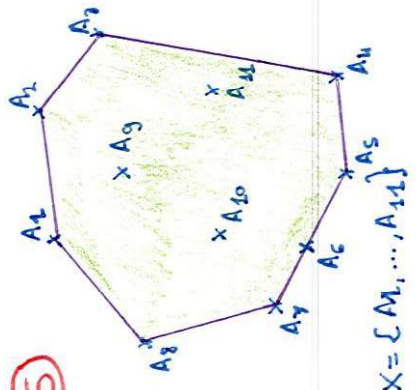


Non convexe



Intersection de convexe

④

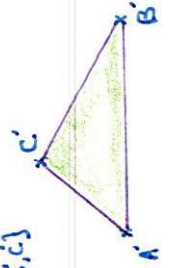


Enveloppes convexe

$$X = \{A, B\}$$

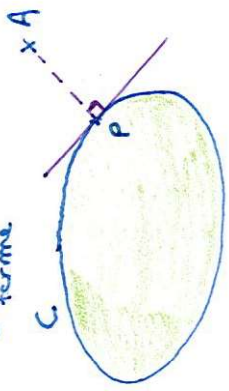
$$X = \{A', B', C'\}$$

$$X = \{A_1, \dots, A_{11}\}$$

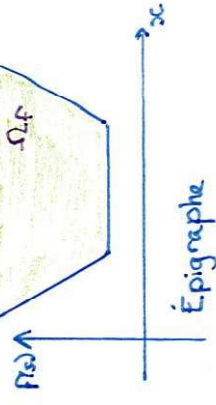


⑤

Projection sur un convexe fermé

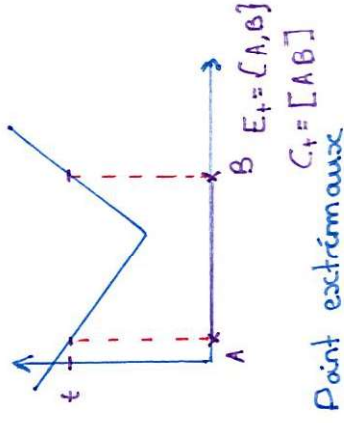


⑥



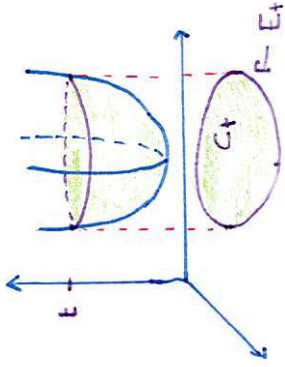
Épigraphe

⑦

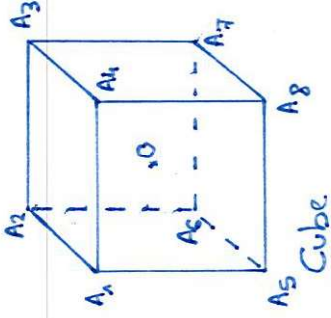


Point extrême

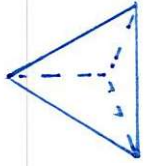
⑧



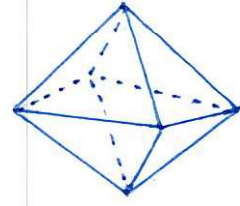
⑨



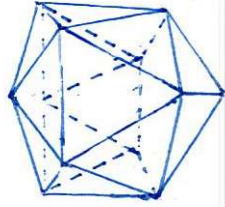
Cube



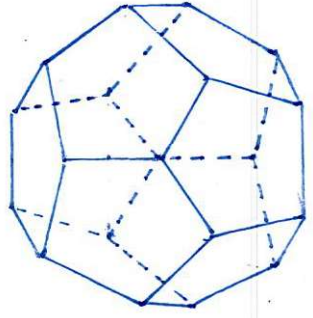
Tétraèdre



Octaèdre



Icosaèdre



Dodécaèdre