Leçon n° 161 :

Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

- **Références :**
  - → Rombaldi : "Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie"
  - → Combes : "Algèbre et Géométrie"
  - → Rouvière : "Petit guide de Calcul Différentiel à l'usage de la licence et l'agrégation"

- **Dév :**
  - → Isométries du cubes (Dev 26)
  - → Point de Fermat d'un triangle (Dev 15)

Leçon 161: Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances et isométries

I- Distance dans un espace euclidien

1) Distance et orthogonalité

2) Matrice de Gram

II- Isométries vectorielles

1) Le groupe orthogonal

2) Générateurs et réductions

3) Classification en dim 2 et 3

III- Isométries affines

1) Le groupe des isométries affines

2) Classification en dim 2 et 3

3) Exemple d'isométrie préservant une partie

↳ DEV: Isométrie du Cube

IV- Les triangles

1) Distance

2) Points particuliers

↳ DEV: Point de Fermat

3) Isométries

Leçon n*161

jeudi 20 janvier 2022 17:29

Leçon n° 161

Aujourd'hui je vais vous parler de la leçon :

161

Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances et isométries.

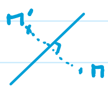
Avant de vous parler de concepts abstraits, revenons là où nous avons initié nos notions de géométrie.

En primaire, nous réalisons des isométries : symétries axiales avec du papier calques.

Nous avons vu que c'est une " application " préservant les distances : c'est même l'éthimologie du mot : isométrie = préserve les distances

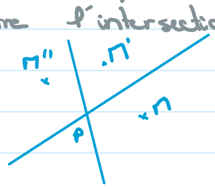
Plus tard, au collège nous avons commencé à classifier les isométries en fonctions du nombre de point fixe :

Isométrie du plan:

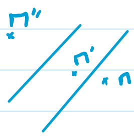
nb pt fixe	∞	droite	point	0
Isométrie	id	Symétrie axial	Rotation	Translation
Application à $X \in \mathbb{R}^2$	$Id(X)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$	$R_\theta X$	$X + A$ $A \in \mathbb{R}^2$
Dessin				

Propriété: · amusante est que composé deux symétrie axial donne une rotation : de centre l'intersection des deux droites

*



· ou une translation si les deux droites sont //



* Deux rotation de même centre : on additionne les angles de rotations.
* Trans + Trans = Trans

Si on compose une translation avec une autre isométrie : on obtient les isométries affines

Isométrie du plan :

nb pt fixe	∞	droite	point	0	
Isométrie	id	Symétrie axial	Rotation	Translation	Symétrie glissée
Application à $X \in \mathbb{R}^2$	$Id(X)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$	$R_\theta X$	$X + A$ $A \in \mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X + A$
Dessin	·	M' M	M' θ M	M M'	

On peut, par les nombres complexes représenter toutes ces isométries : on prend les nb complexes comme couple de réel / points du plan et les opérations (addition, multiplication) représentent les transformations géométriques.
Si on veut essayer de généraliser avec des triplets de réels c'est impossible et il faut passer aux quaternions.
L'étude des quaternions constitue un
Nb complexe $\rightsquigarrow$ DEV 1 : Quaternions

Par la suite, nous pouvons réaliser cette classification dans l'espace :
Dans l'espace : Voir II-3) et III-2)
avec notamment en application affine les vissages.

Dans $\mathbb{R}^n$: Il n'y a plus de classifications
Cependant, on r.q. que l'ensemble des isométries forment un groupe
$O(E)$ = groupe des isométries $= \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A{}^tA = Id \}$
$= \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in E \}$
Et les isométries qui préservent l'orientation (la règle de la main droite pour les physiciens) est $SO(E)$ = isométries directe $= \{ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$
Il y a cependant une réduction des endomorphismes (Thm 15)
Et des générateurs intéressants : c'est utile pour le DEV 1.

Passons maintenant à l'étude de solide :

Par les propriétés des isométrie on peut voir le groupe laissant invariant :
→ un triangle : S_3
→ tétraèdre : S_4
→ Cube : $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (DEV 2)

Distance :

Grâce au produit scalaire on a :

- → Pythagore
- → Al-Kashi
- → inégalité de C-S
- → Matrice de Gram

Et on peut s'intéresser à des points particuliers d'un triangle :

- → centre de gravité
- → Point de Fermat (DEV3)

161: Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens: distances et isométries.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{E}$ un espace affine.

I- Distance dans un espace euclidien

1) Distance et orthogonalité

Notation 1: Le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$ associé à E définit une norme $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ $\forall x \in E$, et une distance $d(x,y) = \|x-y\|$ $\forall x,y \in E$

Théorème 2: (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\forall x,y \in E$ $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont liés.

Théorème 3 (Pythagore) Les vecteurs x et y sont orthogonaux dans E si, et seulement si

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème 4: (Projection orthogonale) Soit F un sev de E. $\forall x \in E$ $\exists ! y \in F$ tel que $\|x-y\| = d(x,F) := \inf_{z \in F} \|x-z\|$

Il s'agit de l'unique vecteur de F tel que $x-y \in F^{\perp}$
(Voir annexe 1)

Exemple 5: Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle $\forall x \in E$ $\quad P_D(x) = \dfrac{\langle x,a \rangle}{\|a\|^2} a$ pour $a \neq 0$.

2) Matrice de Gram

Définition 6: On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n \in E$, la matrice $G(x_1, \dots, x_n) = [\langle x_i, x_j \rangle]_{i,j}$

Proposition 7: M est une matrice de Gram ssi elle est hermitienne positive.
De plus $G(x_1, \dots, x_n)$ est définie ssi la famille $(x_i)_i$ est libre.

Théorème 8: Soit V un sous-espace de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$. Alors $d = d(x,V) = \inf_{y \in V} \|x-y\|$ vérifie

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

II- Isométries vectorielles

1) Le groupe orthogonal

Définition 9: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une transformation orthogonale si $\forall x,y \in E$ $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x,y \rangle$.
On note $O(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales de E.

Proposition 10 On a équivalence:
1) $f \in O(E)$ 2) $\|f(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in E$ 3) Si $\{e_i\}$ BON et $A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(f)$ alors ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$

Théorème 11: Soit $u \in O(E)$. Si F sev de E stable par u alors $F^{\perp}$ stable par u.

Proposition 12: $f \in O(E)$ ssi elle transforme toute BON en une BON.

Définition 13: On note $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A\,{}^tA = I_n\}$
$O_n(\mathbb{R}) < GL_n(\mathbb{R})$. $O_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal.

Proposition 14: L'ensemble des matrices orthogonales directe $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ est un groupe, dit groupe spécial orthogonal.

2) Générateurs et réduction

Théorème 15: Soit $u \in O(E)$. Il existe une BON β de E dans laquelle $mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_r \end{pmatrix}$ avec $p+q+2r=n$.

et $\forall k \in [\![1,r]\!]$ $R_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0,2\pi[\setminus \{\pi\}$

Définition 16: Si F sev de E, la symétrie orthogonale par rapport à F est l'application :
$$S_F(x) = P_F(x) - P_{F^\perp}(x) \quad \forall x \in E$$
où P_G est la projection orthogonale sur G sev de E.

Définition 17: On appelle réflexion, une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et un retournement, une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Théorème 18: Pour $n \geq 2$, $O(E)$ est engendré par les réflexions et $SO(E)$ par les retournements

Théorème/définition 19: $H = Vect_{\mathbb{R}}(1,i,j,k)$ de dimension 4 est un corps non commutatif induit par les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. C'est le corps des quaternions.

DEV 1

Théorème 20: Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors on a l'isomorphisme : $G/_{\{\pm 1\}} \simeq SO_3(\mathbb{R})$

DEV 1

3) Classification en dimension 2 et 3

Proposition 21: Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$, alors

- Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ et donc $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (rotation d'angle θ et de centre O). (Voir Annexe 2)
- Soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ et donc $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$). (Voir Annexe 3)

Théorème 22: Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, alors

- Soit $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et donc A est I_3, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (retournement) ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]0,2\pi[\setminus \{\pi\}$ (rotation d'angle θ)
- Soit $A \notin SO_3(\mathbb{R})$ et donc A est $-I_3$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (réflexion) ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]0,2\pi[\setminus \{\pi\}$ (anti-rotation)

III - Isométries affines

1) Le groupe des isométries affines

Définition 23: Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie affine si $\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2$ $d(f(M), f(N)) = d(M,N)$.

On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Proposition 24: $(Is(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe

Définition 25: Une isométrie affine est un déplacement si le déterminant de son application linéaire associée est positif. Sinon on dit que c'est un anti-déplacement.

On note $Is^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des déplacements.

Théorème 26: Soit $f \in Is(\mathcal{E})$. Il existe une isométrie φ et une translation τ_v tels que :
- L'ensemble $\mathcal{F}$ des points fixes de φ est non vide
- v est dans la direction F de cet espace
- $f = \tau_v \circ \varphi$

De plus, le couple (φ, τ_v) est unique, φ et τ_v commutent et $F = \ker(\vec{f} - id)$.

Exemple 27 : Les isométries affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ sont les $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX + b$ où $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in O_n(\mathbb{R})$.

2) Classification en dim 2 et 3

Théorème 28 : (En dim 2) • Les déplacements sont les translations et les rotations autour d'un point.
• Les antidéplacements sont les symétries orthogonales par rapport à une droite et les symétries glissées. (Voir Annexe 4)

Théorème 29 : (En dim 3) • Les déplacements sont les vissages.
• Les antidéplacements sont les symétries orthogonales par rapport à un plan, les symétries planes glissées et les rotations-symétries. (Voir Annexe 5)

3) Exemple d'isométries préservant une partie

Théorème 30 : Notons $\mathcal{C}$ le cube de sommet $A_1, \dots, A_8$, avec $S = \{A_i\} = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$. Le groupe $Is(S)$ agit de façon transitive sur S. On a $|Is(S)| = 48$ et $|Is^+(S)| = 24$.
De plus, $Is^+(S) \cong S_4$ et $Is(S) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Voir Annexe 10)

IV. Les triangles

1) Distances

Théorème 31 : (Al-Kashi) Pour tout triangle avec les notations de l'annexe 6, on a : $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = c^2$.

Théorème 32 : (Pythagore) Pour un triangle ABC, rectangle en A, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2) Points particuliers

Exemple 33 : L'isobarycentre G d'un triangle ABC est appelé le centre de gravité du triangle ABC.
(Voir Annexe 7)

Proposition 34 : (Point de Fermat) Soient A, B, C trois points non alignés dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que les trois mesures d'angles du triangle ABC sont strictement inférieurs à $2\pi/3$. Posons $f(M) = AM + BM + CM$ avec $M \in \mathbb{R}^2$.
Alors, le minimum de f est atteint en un unique point P intérieur strict. au triangle ABC.
De plus, les angles $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$ sont égaux à $2\pi/3$.
(Voir Annexe 8)

3) Isométries

Théorème 35 : Le groupe laissant invariant un triangle équilatéral est isomorphe à S_3 (Voir Annexe 9)

Théorème 36 : Ici on est dans $\mathbb{R}^3$. On note $A_1, \dots, A_4$ les sommets d'un tétraèdre τ. On a :

$$Is(\tau) \cong S_4 \quad \text{et} \quad Is^+(\tau) \cong \mathcal{A}_4$$

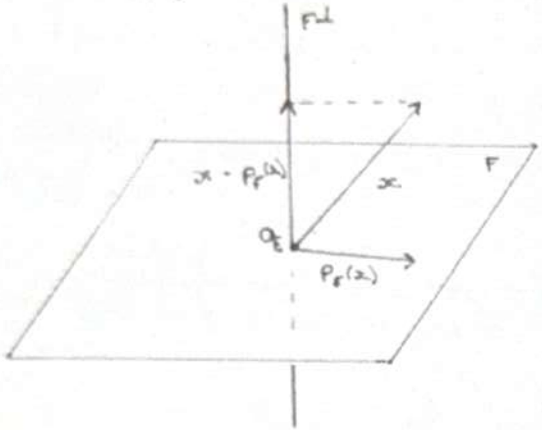
(Voir Annexe 11)

DEV 2

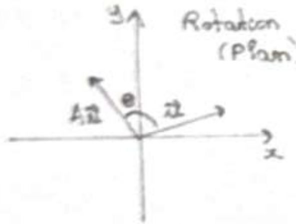
DEV 3

Annexe : Leçon 161

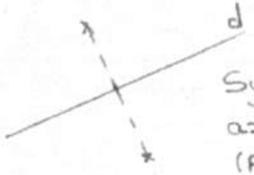
(1) Projection orthogonal de x sur F :



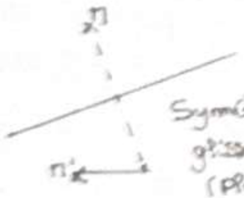
(2) Rotation d'angle θ (Plan)



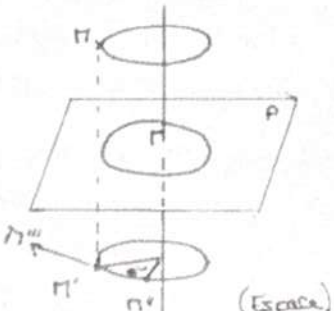
(3) Symétrie axiale (Plan)



(4) Symétrie glissée (Plan)



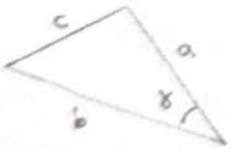
(5)



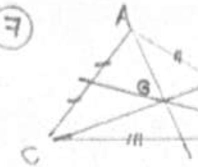
(Espace)

M' symétrie par P de M
M'' obtenue par visage
M''' symétrie plane glissée

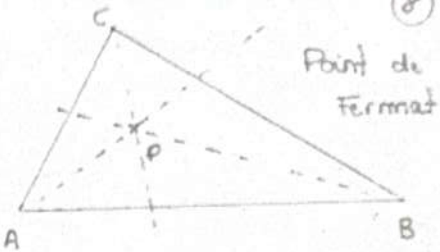
(6) Al-Kashi



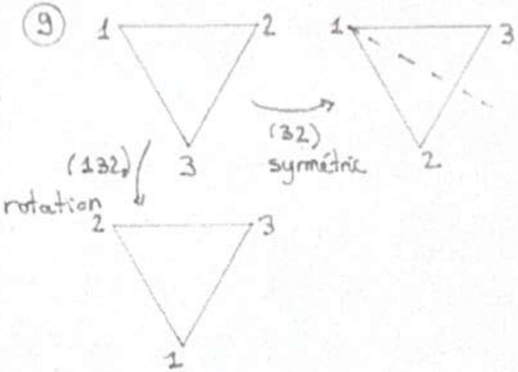
(7) Centre de gravité



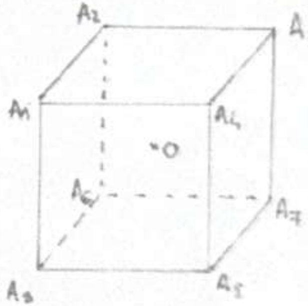
(8) Point de Fermat



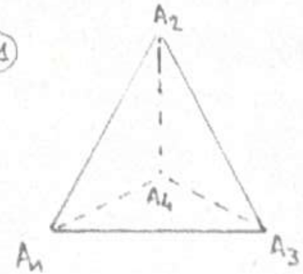
(9)



(10)



(11)



Références :

→ Combes : " Algèbre et géométrie " (Leçon)
→ Rombaldi : " Maths pour l'agreg " (Leçon + DEV : Isométries)
→ Ravière (DEV : Points de Fermat)
→ Perrin (DEV : Quaternions)