Leçon n° 159 :

Formes linéaires et dualités en dimension finie.
Exemples et applications.

- Références :
  - → Rombaldi : "Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie."
  - → Gourdon : "Algèbre"
  - → Ramis, Warusfel, Buff : "Tout en un pour la licence"

- Dev :
  - → Décomposition de Jordan (Dev 4)
  - → Critère de Sylvester (Dev 16)

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

I- Généralités (p120 Gourdon)

II- Orthogonalité (p128 Gourdon)

1) Définition

2) Propriétés

3) Hyperplans

III- Transposition et changement de bases (p130 Gourdon)

IV- Applications

1) Endo. nilpotents
↳ DEV : Décomposition Jordan

2) F.Q réelle
↳ DEV : Critère de Sylvester

3) Calcul Diff.

Rq : Suivre Gourdon et compléter avec Rombaldi

Ajd on va traiter la leçon n° 159 sur

n°159 " Formes linéaires et dualité en dimension finie.

Exemples et applications "

- À 1er abbord la dualité peut-être très abstraite et nous sembler difficile.
- Pourtant une des 1er choses qu'on fait en L1 quand on attaque le cours d'algèbre linéaire s'est d'associer :

  Systèmes de formes linéaires $\Leftrightarrow$ bases des solutions

- On étudie alors un e.v. à partir de propriétés linéaires qu'il vérifie.

Plus, précisément un e.v. peut-être déterminé comme les zéros d'une famille de forme linéaire

- Ainsi, pour construire un vecteur vérifiant certaines conditions, il est parfois utile de passer à l'"espace duale", afin d'utiliser des résultats d'algèbre linéaire.
- Par ex; on peut généraliser des notions de géométrie euclidienne comme **l'orthogonalité**, qui permet d'étudier des e.v. de **dim** **n-k à k** :

  hyperplan $\Leftrightarrow$ droite

Ce qui permet de facilité la démonstration de certains résultat.

I - Dual

1 - Def

2 - Prop

3 - Bidual

II - Orthogonalité

1 - Def

2 - Prop

3 - hyperplan

4 - Applications direct $\rightarrow$ hyperplan $\overset{\perp}{=}$ droite

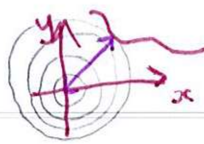
$\rightarrow$ Dal $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ = DEV1

On passe à deux grandes notions qui cachent la dualité comme :

III 1. endo **nilpotent** avec une jolie démo de Jordan

= Dev 2

2. **Calcul dif**



On cherche le pt le plus proche de l'origine d'une courbe :

fait intervenir que les Différentiels sont liées.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Dans cette Leçon E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.

I. Dual d'un espace vectoriel

I.1 Généralités

[Gou] p.126 **Def 1** On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

[M] p.13 **Ex 2** Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, et $x=\sum x_i e_i$ un vecteur de E. Pour chaque $i\in\{1,\dots,n\}$, l'application $e_i^*: \begin{array}{l} E\to \mathbb{K} \\ x\mapsto x_i \end{array}$ est une forme linéaire sur E ($i$ème forme coordonnée sur la base $\mathcal{B}$).

[Gou] p.127 **Def 3** On appelle espace dual de E, et l'on note E^*, l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires.

Def 4 Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On appelle famille duale de $\mathcal{B}$ la famille $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ des formes coordonnées dans $\mathcal{B}$. Elle est caractérisée par $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$ $(\forall x\in E, x=\sum e_i^*(x)e_i)$

Théo 5 La famille $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$ et notée $\mathcal{B}^*$. Donc $\dim E^*=\dim E$. $(\forall \varphi\in E^*, \varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi(e_i)e_i^*)$

[TEO] p.84 **Rem 6** Pour tout forme linéaire $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^*$ et tout vecteur $x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$ on a le développement bilinéaire :
$$\varphi(x)=\langle\varphi,x\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^*,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\rangle=\sum_{1\le i,j\le n}\lambda_i\alpha_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i$$

Prop 7
- Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, il existe un vecteur x tel que $\varphi(x)=1$
- Si x est un vecteur non nul de E, il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(x)=1$.

p.85 **Ex 8** Soit $E=\mathbb{C}_n[X]$. L'application $\varphi_k: P\mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ est une forme linéaire sur E pour tout k. La formule de Taylor $\forall P\in E$, $P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$ montre que $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ est la base duale de la base $(X^0,\dots,X^n)$ de E.

Théo 9 (Base anté-duale) Toute base $\mathcal{B}^*$ de E^* est la base duale d'une unique base $\mathcal{B}$ de E appelée base anté-dual de $\mathcal{B}^*$.

Théo 10 (Biduale) Si $x\in E$, on note $\tilde{x}: \begin{array}{l} E^*\to \mathbb{K} \\ \varphi\mapsto\varphi x \end{array}$. On a $\tilde{x}\in E^{**}$ et l'application $f: \begin{array}{l} E\to E^{**} \\ x\mapsto\tilde{x} \end{array}$ est un isomorphisme. [Gou] p.12

Rem 11 Cet isomorphisme est canonique car il ne dépend pas du choix d'une base.

I.2 Présentation matricielles

Prop 12 Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}^*$ sa duale, $x\in E$, $\varphi\in E^*$, $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $U=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi)$. On a alors $\varphi(x)={}^tUX$. [M] p.2

Prop 13 (Changement de base pour la dualité) Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors la matrice de passage $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}^{*\prime}$ est ${}^tP^{-1}$.

Ex 14
- Les vecteurs $V_1=(2,1,4)$, $V_2=(3,2,3)$, $V_3(-1,-1,2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. La base duale associée est (V_1^*,V_2^*,V_3^*) où $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} V_1^*(x_1,x_2,x_3)=7x_1-9x_2-x_3 \\ V_2^*(x_1,x_2,x_3)=-6x_1+8x_2+x_3 \\ V_3^*(x_1,x_2,x_3)=-5x_1+6x_2+x_3 \end{cases}$

II - Orthogonalité au sens de la dualité

II - 1. Définitions

[Gou] P12 **Def 15 :** Soient $x\in E$ et $f\in E^*$. x et f sont dit orthogonaux si $f(x)=\langle f,x\rangle=0$.

[Gou] P12 **Def 16 :** Soit $A\subset E$. On note $A^\perp=\{f\in E^*\mid\forall x\in A, f(x)=0\}$. L'ensemble $A^\perp$ est un s.e.v de E^* appelé orthogonal de A.

[Gou] p128 **Def 17 :** Soit $B\subset E^*$. On note $B^\circ=\{x\in E\mid\forall f\in B, f(x)=0\}$ L'ensemble B° est un s.e.v de E appelé orthogonal de B

[Gou] p128 **Rem 18 :** Si $f\in E^*$, alors $\{f\}^\circ$ est le noyau de f.

II - 2. Proposition

[Gou] p128 **Prop 19 :**
① $A_1\subset A_2\subset E \Rightarrow A_2^\perp\subset A_1^\perp$
② $B_1\subset B_2\subset E^* \Rightarrow B_2^\circ\subset B_1^\circ$
③ $A\subset E \Rightarrow A^\perp=\mathrm{Vect}(A)^\perp$
④ $B\subset E^* \Rightarrow B^\circ=(\mathrm{Vect}\,B)^\circ$

[Gou] p128

Thm 20: (i) F s.e.v de E. $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$
(ii) G s.e.v de E^*. $\dim G + \dim G^{\circ} = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$.

[Gou] p128

Rem 21: un ss-e est égal à l'espace tout entier ssi son orthogonal est nul.

[Gou] p128

Cor 22: - Soient p formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_p$ de E^* t.q. $rg(\ell_1, \dots, \ell_p) = r$.
Alors, $F = \{x \in E \mid \forall i, \ell_i(x) = 0\}$ est de dim $n-r$.

- Réciproquement, si F est un s.e.v de E de dim. q $\exists$ $n-q$ formes linéaires linéairement indé. $\ell_1, \dots, \ell_{n-q}$ t.q. $F = \{x \in E \mid \forall i, 1 \leq i \leq n-q, \ell_i(x) = 0\}$

[Gou] p129

Prop 23: A_1 et A_2 s.e.v de E et B_1 et B_2 s.e.v de E^*.
① $(A_1 + A_2)^{\perp} = A_1^{\perp} \cap A_2^{\perp}$ ② $(A_1 \cap A_2)^{\perp} = A_1^{\perp} + A_2^{\perp}$
③ $(B_1 + B_2)^{\circ} = B_1^{\circ} \cap B_2^{\circ}$ ③ $(B_1 \cap B_2)^{\circ} = B_1^{\circ} + B_2^{\circ}$

II-3. Hyperplan

[m] p68

Def 24: On appelle hyperplan de E, tout s.e.v H t.q. $\dim(E/H) = 1$.

[Gou] p129

Prop 25: $\ell \in E^*$ forme linéaire non nulle.
Alors, $\operatorname{Ker} \ell$ est un hyperplan de E
Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Ex 26: Revenons à l'ex 8. Le noyau de $\delta_K : P \mapsto \frac{P^{(K)}(0)}{K!}$ est un hyperplan de dimension n engendré par la famille $(X^0, \dots, X^{n-1})$.

[Gou] p129

Prop 27: H hyperplan de E. L'ensemble $H^{\perp}$ de formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*.

Application 28: On peut montrer par l'orthogonalité que l'intersection de K hyperplans distincts de E est de dimension $n-K$.

Application 29: (DEV 1)

Prérequis : Soit B une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors la trace de la matrice $[f]_B$ ne dépend pas de la base β choisie. Cette valeur s'appelle la trace de f et est notée $\operatorname{tr} f$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $X \mapsto \operatorname{Tr}(AX)$

1) $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto f_A \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ est un isomorfisme
2) $\tilde{f} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ forme linéaire t.q. $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\tilde{f}(XY) = \tilde{f}(YX)$.
Alors, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.q $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \lambda \operatorname{Tr}(X)$
3) $\forall n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$

II.4. Application transposée

[Go] p1..

Def 30: Soient F et E deux $\mathbb{K}$-e.v. de dim qlcq. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. $\forall f \in F^*$, on a $f \circ u \in E^*$. L'application linéaire $F^* \to E^*$, $f \mapsto f \circ u$ est appelée application transposée de u et notée ${}^t u$.

[Go] p1..

Prop 31: (i) $rg\, u = rg\, {}^t u$ (ii) $\operatorname{Im} {}^t u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$
(iii) $\operatorname{Ker}({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$

[m] p1..

Prop 32: Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v.
① $\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(E,F)$, ${}^t(f+g) = {}^t f + {}^t g$
② $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, ${}^t(\lambda f) = \lambda {}^t f$
③ $\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G)$, ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

[m] p1..

Prop 33: $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et β^* base duale. $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $\operatorname{Mat}({}^t u, \beta^*) = {}^t \operatorname{Mat}(u, \beta)$

[Go] p1..

Prop 34: $u \in \mathcal{L}(E)$. F s.e.v de E est stable par u ssi $F^{\perp}$ stable par ${}^t u$.

Ex 35: Soit u laissant stable tout les hyperplans de E. Alors, par dualité on peut montrer que u est une homotéthie.

III - Applications

III. 1. Endomorphismes nilpotents

III. 1. a Définitions et propriétés

[m] p230 **Def/Prop 36 :** $u \in \mathcal{L}(E)$. u est nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$.
Dans ce cas, q s'appelle l'indice de nilpotence de u.

[m] p230 **Rem 37.**
1) L'endomorphisme nul est nilpotent
2) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ avec u nilpotent tel que $uv = vu$, alors uv est nilpotent.
3) u, v endomorphisme nilpotents, tels que $uv = vu$ alors $u+v$ nilpotent.
4) u nilpotent, alors $\ker(u) \neq 0$.
5) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ t.q $A^m = 0$
6) u nilpotent d'ordre q. Alors $1 \leq q \leq n$.

[m] p231 **Prop 38 :** $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes
① u nilpotente
② $\mu_u = X^q$ où q l'indice de nilpotence
③ $\chi_u = X^n$

Lem 39 : $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre q. $E_i := \ker(u^i)$
1) $E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_q$
2) $\forall i \in [\![0; q-1]\!]$ on a $u(E_{i+1}) \subseteq E_i$.

Rombaldi: DEV 2

Lem 40 : $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente de rang $q \geq 1$.
Alors, $\exists \ell \in E^*$, $x \in E$ t.q. :
- $F = \mathrm{Vect}(x, \ldots, u^{q-1}(x))$
- $G = H^\perp$ avec $H = \mathrm{Vect}(\ell, {}^t u(\ell), \ldots, ({}^t u)^{q-1}(\ell))$

Sont stables par u et $E = F \oplus G$

Lem 41 : $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$
$\exists \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ base de E t.q. chaque ss-e.v $E_k = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_k)$ soit stable par u et la matrice de $u_{|E_k}$ est
$$J_k = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q_k}(\mathbb{K}) \text{ où } q_k = \dim E_k$$

III. 2. Application au calcul différentielle

Def 42 : E et F banach U un ouvert de E $a \in U$ et $f : U \to F$ application.
Si $\exists L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ t.q. $\forall h \in E$ (vérifiant $a+h \in U$), on ait $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$,
alors L est unique.
L'application linéaire continue L est appelée la différentielle, ou encore l'application linéaire tangente, de f en a et est notée $df(a)$.

[Rouv. p.37?] **Théorème 43 (des extrema liés) :** Soient $f, g_1, \ldots, g_p$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et X l'ensemble défini par les équations $g_1(x) = 0, \ldots, g_p(x) = 0$ avec $x \in U$
Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$, et si les différentielles $Dg_1(a), \ldots, Dg_p(a)$ sont des formes linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}^n$, alors nécessairement les formes linéaires $Df(a)$, $Dg_1(a), \ldots, Dg_p(a)$ sont liées :

$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \cdots + \lambda_p Dg_p(a)$ $(*)$

Exemple 44 : les points les plus proches de l'origine sur la courbe plane C définie par l'équation $g(x,y) = 0$. Il s'agit de trouver le minimum de x^2+y^2 lorsque x et y sont liés par cette relation (voir Figure)

[R] p.44 **Remarque 45 (Intérpretation géométrique) :** La condition $(*)$ est équivalente à
$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker Dg_i(a) \subset \ker Df(a)$$
($Df(a)$ est nulle sur l'intersection des $\ker Dg_i(a)$)

Leçon n*159

jeudi 20 janvier 2022 17:29

Leçon n° 159

Annonce de plan :

La leçon traitée aujordhui est :

n° 159 : "Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications."

Quand on attaque les cours d'algèbre linéaires, on a par habitude de chercher à déterminer une base de solution d'un système.

système de formes linéaires ⇝ base des solutions

Ainsi, la description d'un espace vectoriel à partir d'un système d'éq. apporte un point de vue géométrique : on étudie alors un e.v à partir de propriétés linéaires qu'il vérifie. Plus précisément, un e.v. peut-être déterminé comme les zéros d'une famille de formes linéaires.

Ainsi, pour construire un vecteur vérifiant certaines conditions, il est parfois utile de traduires ces conditions dans l'"espace dual" afin d'utiliser des résultats d'algèbre linéaires.
Par exemple, par vision géométrique, on peut généraliser des notions de natures euclidienne comme celle de l'orthogonalité qui permet d'étudier les espaces de dimensions k, en étudiant des e. de dim n-k
Un résultat est que l'hortogonal d'un hyperplan et une droite.

Par ces motivations, nous avons présenté de nombreuses déf. et prop. de l'espace dual : cela forme un grand I.

I - Dual
  1 - Def
  2 - Prop
  3 - Bidual

II - Orthogonalité
  1 - Def
  2 - Prop
  3 - hyperplan
  4 - Application direct : → hyperplan $^\perp$ = droite
  → DEV 1
  5 - Transposée

III - Domaine d'application
  → DEV 2 : Décompo de Jordan nilpotent
  → Calcul dif.

question 8 :

1) E $\mathbb{R}$-e.v. de dim finie impaire et $f \in \mathcal{L}(E)$
Démontrer $\exists$ au moins 1 droite et un hyperplan de E stables par f.

$\dim E = 2k+1$ $\quad k \in \mathbb{N}$.
Donc,
$\chi_f = \prod_{i=1}^{2k+1} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ donc $\exists$ une v.p scindé donc il existe un λ et v t.q $f(v) = \lambda v$.
Donc Vect(v) est stable par f.

$E \setminus v$ est stable par f car $f(E) \subset E$ et par lemme des noyaux.

On a χ_f est degré impair donc en calculant les limites $-\infty$ et $+\infty$, on voit qu'il y a une racine réelle, disons λ.
On a alors $E_\lambda \supsetneq \{0\}$ et on peut considérer un vecteur propre x_λ associé à λ.
Alors, $\mathrm{Vect}(x_\lambda)$ est stable par f
droite

Sans la dualité, comme $\dim E_\lambda = \dim \ker(f - \lambda id) \geq 1$
On a par le thm du rang que $\dim(\mathrm{Im}(f - \lambda Id)) \leq n-1$.
Soit H un hyperplan t.q $H \supseteq \mathrm{Im}(f - \lambda id)$
M.q H est stable.
Soit $x \in H$. Alors, $f(x) = \underbrace{f(x) - \lambda x}_{\in \mathrm{Im}(f-\lambda id) \subset H} + \underbrace{\lambda x}_{\in H} \in H$

Avec la dualité, On a m.q. tout endo. d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dim impair admet une droite stable. On a $\dim E^* = \dim E$ impair donc ${}^t f : E^* \to E^*$ admet une droite stable, disons $\mathrm{Vect}(\ell) \neq 0$
Alors, $\forall x \in \mathrm{Ker}\, \ell$ ← hyperplan, on a $\ell \circ f(x) = ({}^t f)(\ell)(x) = 0$ car $({}^t f)(\ell) \in \mathrm{Vect}\, \ell$ et $\ell(x) = 0$.
Finalement, $\mathrm{Ker}\, \ell$ stable par f.

Rem : H stable par f s'écrit matriciellement, dans une base formée de vecteurs de H, et complétée par un vecteur $\notin H$.

$$\left[\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 \;—\; 0 & * \end{array}\right]$$

Autre façon :
Si on écrit $\chi_f = \prod P_i^{\alpha_i} = P_1^{\alpha_1} \times \dots \times P_k^{\alpha_k}$ avec P_1 de degré 1 (possible car $\dim E = \deg \chi_f$ impair

Rappel :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ les ss-e stables par A sont les $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, $k \geq 1$

En particulier, V_2 est de dim $n-1$.
Avec ce raisonnement, on peut essayer de construire H en générale.