

Léon n° 1483

Dimension d'un e.v (de dim finie). Rang.
Exemples et applications.

• Références :

- Rombaldi : "Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie."
- Grifone : "Algèbre linéaire"
- Gourdon : "Algèbre"
- Félber : "Anneaux, corps, résultants"
- Carrega : "Théorie des corps : la règle et le compas"

• Dév :

- Décomposition de Jordan (Dev 4)
- Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL_n(\mathbb{K})$ (Dev 13)
- Théorème Spectral (Dev 22)
- Théorème de Wamteel (Dev 31)

I - Bases et dimension finie

- 1) Familles de vecteurs
- 2) Existence de bases
- 3) Théorèmes fondamentaux sur la dimension (dim finie)
- 4) Somme, somme directe et supplémentaires

II - Rang

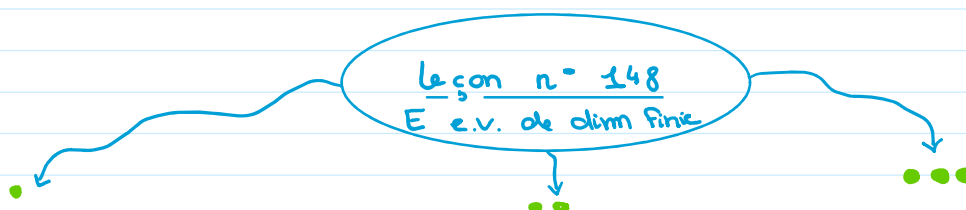
- 1) Rang d'une application linéaire
- 2) Rang d'une matrice

III - Applications

- 1) Endomorphisme et récurrence
 - ↳ DEV: Décomp. Jordan
 - ou
 - ↳ DEV: Générateurs GL_n et SL_n
 - ou
 - ↳ DEV: Thm Spectral
- 2) Extension de corps finis
 - ↳ DEV: Wantzel

Leçon n°148

Défense plan:



Historiquement, l'algèbre linéaire naît de l'étude des systèmes linéaires de 2 à 3 inconnues par Leibniz et Gauss qui utilisait une notation sans forme de tableau des transformations linéaires.

Par la suite, une généralisation en dimension n voit le jour par Cauchy. Par cet aspect historique, il est naturel d'étudier les e.v. en dim finie afin d'étudier les résultats importants déjà présent avec cette restriction. Par ce faire nous pouvons voir ces résultats par trois axes :

• Espace vectoriel et dim finie : bases

↳ décomposition unique $x \in E$

↳ permet de classifier les e.v. (prop 9)

↳ toute famille libre peut être complétée en une base

↳ Skrititz : un e.v. engendré par n élé.

toute famille contenant plus de n élément est liée

↳ Ex: $V: K[X]/(P(X))$ avec $\deg P \geq 1$ on a $\dim V = \deg P$ et V est un K -e.v.

↳ Application: les extensions de corps vu comme des e.v.

La dim finie nous permet d'avoir des résultats arithmétiques importants notamment le résultat de la base télescopique mais également le fait que α algébrique $\Leftrightarrow [K(\alpha):K] < +\infty$.

Et par les nb constructible à la règle et au compas il en découle le thm de Wantzel qui fera l'objet d'un développement

DEV2: Wantzel

•• Matrices et dim finie : rang

Concernant les matrices, en regardant la dim. des ss-e.v. engendré par les vecteurs colonnes on obtient le rang de la matrice.

Quelques propriétés remarquables sont les suivantes :

↳ $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$

↳ $A \in M_n$ inv. ssi $\text{rg}(A) = n$.

↳ le rang reste invariant par extension de corps



••• Applications linéaires et dim finie : rang

↳ thm du rang : $\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f)$

●●● Applications linéaires et dim finie : rang

↳ Thm du rang : $\dim E = \dim \ker(f) + \text{rg}(f)$

↳ $f \text{ inj} \Leftrightarrow f \text{ surj.} \Leftrightarrow f \text{ bij}$

⚠ Faux en dim ∞ (Penser à l'ex $P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}[x]$)

↳ Application à la dualité: $\dim E = \dim E^*$

ou encore certains résultats nécessitent une récurrence sur la dimension comme la réduction de Jordan des endo. nilpotents.

La démonstration de ce résultat fera l'objet d'un 1^{er} DEV

DEV 1: Décompo Jordan (par la dualité des endo. nilpotent)

Il est à noter que l'utilisation de la récurrence sur la dim n'est pas applicable qu'à la dualité mais aussi dans de nombreuses démo.

Léon 148: Dimension d'un espace vectoriel (cas de la dimension finie). Rang. Exemples et Applications.

On considère K un corps, E un K -espace vectoriel.

Bases et dimension finie

1. Familles de vecteurs

Définition 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une famille de vecteurs $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E est :

- génératrice si $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\} = E$. Tout élément de E est combinaison linéaire des vecteurs e_i .
 - libre si $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- Les vecteurs sont linéairement indépendants. Si elle n'est pas libre, elle est liée.
- une base si elle est génératrice et libre.

Remarque 2: Une famille génératrice finie n'existe pas toujours. Dans $\mathbb{R}[X]$, une famille finie de polynômes $\{P_1, \dots, P_n\}$ ne peut être génératrice car toute combinaison linéaire ne donne que des polynômes de degré $\leq \sup \{\text{degrés des } P_i\}$.

Exemple 3: Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0)^t\}$ est libre, $\{(1,0)^t; (0,1)^t\}$ est une base et $\{(1,0)^t; (0,1)^t; (1,1)^t\}$ est génératrice mais pas libre donc pas une base.

Définition 4: Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie. Dans le cas contraire il est de dimension infinie.

Exemple 5: K^n est de dimension finie n mais $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Proposition 6: Une famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est liée si et seulement si au moins un des e_i appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.

Proposition 7: Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille libre et x un vecteur quelconque de l'espace engendré par les e_i . Alors la décomposition de x sur les e_i est unique.

Proposition 8: Une famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E si et seulement si tout $x \in E$ se décompose de façon unique sur les e_i .

Proposition 9: Soit $B := (e_1, \dots, e_n)$ base de E . Alors il existe un isomorphisme $f_B: E \rightarrow K^n$. Les x_i sont les coordonnées de x dans $x := x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ la base B .

Proposition 10: 1. $\{x\}$ est libre $\Leftrightarrow x \neq 0$.

2. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
3. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
4. Toute famille contenant une famille liée est liée.
5. Toute famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ dont l'un des e_i est nul, est liée.

Dans la suite, E est un espace vectoriel de dimension finie.

2. Existence de bases

Théorème 11: (D'existence) On suppose $E \neq \{0\}$. Soient A une famille génératrice et $L \subset A$ une famille libre. Alors il existe B une base telle que $L \subset B \subset A$.

Théorème 12: Si $E \neq \{0\}$, alors :

- i) de toute famille génératrice on peut extraire une base.
- ii) (Théorème de la base incomplète) Toute famille libre peut être complétée en une base.

Remarque 13: On montre en fait que toute famille libre peut être complétée en une base en choisissant les vecteurs dans une famille génératrice arbitraire choisie à l'avance.

3. Théorèmes fondamentaux sur la dimension (dimension finie)

Lemme 14: (Steinitz) Soient $B := \{e_1, \dots, e_n\}$ une famille génératrice et $\{u_1, \dots, u_m\}$ une famille libre de E . Alors :

- i) $m \leq n$.
- ii) On peut trouver $e_{m+1}, \dots, e_n \in B$ tels que $\{u_1, \dots, u_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ est encore génératrice.

Théorème 15: Dans un $e \in E$ sur K de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E sur K et noté $\dim_K E$.

Remarque 16: Si $E = \{0\}$ on pose $\dim_K E = 0$. Donc $E = \{0\} \Leftrightarrow \dim_K E = 0$.

Exemple 17: 1. $\dim_K K = 1$, une base est $\{1\}$. } D'où l'importance du K en indice.
 $\dim_K K = 2$, une base est $\{1, i\}$.

2. $\dim_K \mathbb{R}_n[X] = n+1$, une base est $\{1, X, \dots, X^n\}$.

3. $K[X]$ étant euclidien, on peut voir que $\forall P \in K[X] \setminus \{0\}, \frac{K[X]}{\langle P(X) \rangle}$ est un espace vectoriel de dimension $\deg P$.

4. $\dim_K \mathcal{L}(E, K) = \dim_K E \times \dim_K K = \dim_K E$.

II Rang

1. Rang d'une application linéaire

Soient E et E' des e.v sur le même corps K et $f: E \rightarrow E'$ une application linéaire.

Définition 29: Le rang de f , noté $rg(f)$, est la dimension de l'image de f .

Théorème 30: (Théorème du rang) $\dim E = \dim(\text{Ker}(f)) + rg(f)$.

Corollaire 31: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ avec E et E' de même dimension finie. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Remarque 32: Ce résultat est faux en dimension infinie: $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ est surjective mais pas injective.

Application 33: On a un isomorphisme entre E et son dual E^* seulement en dimension finie.

2. Rang d'une matrice

Définition 34: 1. Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace engendré par cette famille.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $A = [c_1, \dots, c_n]$ où ci sont les vecteurs colonnes de A . On appelle rang de la matrice A le rang de la famille des vecteurs colonnes: $rg(A) = rg\{c_1, \dots, c_n\} = \dim(\text{Vect}\{c_1, \dots, c_n\})$.

Proposition 35: Soient E et F deux e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient B_1, B_2 deux bases quelconques de E et F et $A = \text{Mat}_{B_2, B_1}(f)$.

Alors $rg(f) = rg(A)$.

Remarque 36: Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ alors $rg(A) \leq \inf\{p, q\}$.

Corollaire 37: Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ alors A est inversible si $rg(A) = n$.

Théorème 38: Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Si $r = rg(A) \geq 1$, alors A est équivalente à

$$J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ c'ad } \exists P, Q \text{ des matrices inversibles telles que } A = Q^{-1} \cdot J_r \cdot P.$$

Proposition 39: Pour toute matrice A on a $rg(A) = rg({}^tA)$.

Théorème 40: Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $rg(A) = \max\{r: \exists \text{ un mineur non nul d'ordre } r\}$.

Corollaire 19: 1. Dans un e.v de dimension n , toute famille ayant plus de n éléments est liée.

2. Dans un e.v de dimension n , les familles ayant moins de n éléments ne peuvent être génératrices.

Application 19: (dim $E < +\infty$). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\exists P \in \mathcal{K}[X]$ tq $P(u) = 0$.

Théorème 20: Soit E e.v de dimension n . Alors:

1. Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.

2. Toute famille libre ayant n éléments est une base.

Proposition 21: Soient $E_1, \dots, E_p$ des e.v de dimension finie sur le même corps K .

$$\text{Alors } \dim_K(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim_K E_1 + \dots + \dim_K E_p.$$

Proposition 22: Soit F un sous-e.v de E . Alors F est de dimension finie et de plus:

$$1. \dim_K F \leq \dim_K E.$$

$$2. \dim_K F = \dim_K E \iff F = E.$$

4. Somme, somme directe et supplémentaires

Soient E_1 et E_2 sont des sous-e.v de E .

Définition 23: On appelle somme de E_1 et E_2 le sous-espace vectoriel de E défini par:

$$E_1 + E_2 = \{x \in E \mid \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2: x = x_1 + x_2\}.$$

• La somme est directe, notée $E_1 \oplus E_2$, si la décomposition est unique.

• E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$.

Proposition 24: $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si pour toutes bases B_1 de E_1 et B_2 de E_2 , $B_1 \cup B_2$ est base de E .

Corollaire 25: $\forall E_1$ sev de E , il existe toujours un supplémentaire. Il n'est pas unique, mais si E est de dimension finie, tous les supplémentaires de E_1 ont la même dimension.

Théorème 26: $E = E_1 \oplus E_2 \iff \begin{cases} 1. E_1 \cap E_2 = \{0\}. \\ 2. \dim E = \dim E_1 + \dim E_2. \end{cases}$

Exemple 27: $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_n(K) \oplus \mathcal{S}_n(K)$.

Proposition 28: $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

En particulier $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

Application 41: Si $K \subset L$, avec L un autre corps, $A \in M_{n,p}(K) \subset M_{n,p}(L)$, on a $\text{rg}_L(A) = \text{rg}_K(A)$. Le rang est invariant par changement de corps.

III Applications

1. Endomorphismes et récurrence

De nombreux théorèmes se démontrent en utilisant une récurrence sur la dimension de E .

Ici on suppose connue la notion de dual, d'espace orthogonal.

Théorème 42: Si G est un sev de E^* , $\dim G + \dim G^\circ = \dim E^* = \dim E$.

Proposition 43: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sev F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Lemme 44: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Pour tout vecteur $x \in E$ tq $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $B_{u,x} := (u^k(x))_{0 \leq k \leq q-1}$ est libre et $\mathcal{L}'_{u,x}$
 $F := \text{Vect}(B_{u,x})$ est stable par u .

Lemme 45: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\exists \varphi \in E^*$ et $x \in E$ tq $\mathcal{L}'_{u,x}$
 F et $G := H^\circ$, où $H = \text{Vect}\{u, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi)\}$, sont stables par u avec
 $E = F \oplus G$.

Théorème 46: (Jordan nilpotent) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'ordre $q \geq 1$ alors il existe une base $B := B_1 \cup \dots \cup B_r$ de E telle que chaque sev $E_i := \text{Vect}(B_i)$ soit stable par u et la matrice de $u|_{E_i}$ est $J_i = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} \in M_{q_i}(K)$ avec $q_i = \dim(E_i)$.

DEV 4

Corollaire 47: (Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tq son polynôme caractéristique $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{a_i}$ soit scindé sur K avec $a_i \geq 1$ et $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$. Alors $\exists B$ base de E tq $\text{Mat}_B(u)$ est triangulaire de la forme $\text{diag}(J_1, \dots, J_r)$ où $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{a_k}(K) \forall k \in \{1, \dots, r\}$ avec $E_{k,i} \in \{0, 1\}$.

2. Extensions de corps finis

Si K et L sont deux corps tq $K \subset L$, on dit que L est une extension de K , en particulier c'est un e.v sur K . Sa dimension est appelée degré de $\mathcal{L}'$ extension et est notée $[L:K]$.

Pour ce paragraphe L désigne une extension d'un corps commutatif K . $\forall \alpha \in L$ on note $K[\alpha] = \{P(\alpha) : P \in K[X]\}$ et on désigne par $K(\alpha)$ le plus petit sous-corps de L qui contient K et α .

Théorème 48: (Base télescopique) Soient $K \subset M \subset L$ des extensions de corps finis. $\mathcal{L}'$ extension $K \subset L$ est de degré fini ssi les extensions $K \subset M$ et $M \subset L$ sont de degré fini. Dans ce cas on a: $[L:K] = [L:M] \times [M:K]$.

Lemme 49: Soit $K \subset L$ et $\alpha \in L$. α est algébrique sur $K \iff K[\alpha] = K(\alpha) \iff [K[\alpha]:K] < +\infty$.

Notons $\mathbb{E}$ l'ensemble des nombres constructibles.

Lemme 50: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}$.

Lemme 51: $\mathbb{E}$ est stable par la racine carrée.

Théorème 52: (Wantzel) Soit $\alpha \in K$. Alors $\alpha \in \mathbb{E}$ ssi $\exists L_0, \dots, L_p$ une suite finie de sous-corps de K vérifiant:
 $L_0 = \mathbb{Q}, \forall i \in [0, p-1]: [L_{i+1}:L_i] = 2$ et $\alpha \in L_p$.

Corollaire 53: Si $\alpha \in \mathbb{E}$ alors $[Q:Q(\alpha)] = 2^p; p \in \mathbb{N}$.

DEV 2

Références:

- Grifone - Algèbre linéaire.
- Courdon - Les maths en tête: Algèbre.
- Rombaldi - Mathématiques pour l'agrégation: Algèbre et géométrie.
- Ulmer - Anneaux, corps, résultant, Algèbre pour L3/M1/agrégation.