
Oral d'analyse

Session 2026

Couplage :

- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Leçon choisie : 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Développements :

- limite de variables aléatoires gaussiennes.
- Preuve de la formule de Stirling par le théorème central limite.

développement choisi par le jury : Preuve de la formule de Stirling par le théorème central limite.

Composition du jury : Une femme et deux hommes. Très bienveillant.

Note obtenue : 18

Remarques générales

Je suis passé sur cette leçon en oral blanc de décembre. (D'ailleurs ma leçon d'algèbre est également celle sur laquelle je suis passé en décembre c'est hyper rigolo).

J'ai fait le même plan qui avait été validé par E. Russ et S. Rigat. Je suis passé sur le développement 2 que j'ai bouclé en 14min 25s ce qui n'a pas du tout énervé le jury.

Pour les 6 minutes j'ai tenu 5 min 59s tout pile.

Le jury a semblé très content(c'est peut-être juste une vue de mon esprit) quand il m'a rappelé que j'avais choisi les probas. (J'étais le premier créneau de la journée à 11h).

1 Mes 6 minutes

Pour les 6 minutes j'ai présenté mon plan linéairement en revenant sur les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires tout en construisant le synoptique avec les contres exemples et les réciproques partielles. Ça permet d'introduire facilement les développements et de donner une idée des modes de convergences qu'ils font intervenir.

2 Mon développement

Je retape ici mon développement histoire de pouvoir y référer dans la partie question.

Théorème 2.1. (Formule de Stirling). On a :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration.

Lemme 2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$. Alors $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim$

$$\mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right).$$

On procède maintenant par étapes :

Étape 0 : (Notations et conventions).

Soit (X_n) une suite de var. aléatoires indép. suivant toute une loi de poisson de paramètre 1.

Notons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

Pour une variable aléatoire Y , on notera F_Y sa fonction caractéristique.

On note T une variable aléatoire suivant la loi normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\text{Étape 1 : } \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > x) dx \right).$$

Pour cela, on va appliquer le théorème de convergence dominée.

D'après le théorème central limite, $T_n \longrightarrow T$ en loi donc d'après la caractérisation de la convergence en loi $F_{T_n}(x) \longrightarrow F_T(x)(\clubsuit)$ en tout point x où F_T est continue. Or, T est à densité continue donc $(\clubsuit)$ est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$\forall x \geq 0, \mathbb{P}(T_n > x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(T > x).$$

Il reste à s'occuper de la domination.

Pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n > x) &\leq \mathbb{P}(T_n^2 > x^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(T_n^2)}{x^2} \text{ (inégalité de Markov).} \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n^2) &= \text{Var}(T_n) + \mathbb{E}(T_n)^2 \\ &= \text{Var}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)^2 \\ &= \frac{\text{Var}(S_n)}{n} + \frac{(\mathbb{E}(S_n) - n)^2}{n} \\ &= 1 \text{ car } S_n \sim \mathcal{P}(n) \text{ donc } \mathbb{E}(S_n) = \text{Var}(S_n) = n. \end{aligned}$$

On obtient alors la domination suivante :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T_n > x) \leq \underbrace{\mathbb{1}_{]0,1]}(x) + \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{]1,+\infty]}(x)}_{\text{Intégrable et indépendant de } n}.$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > x) dx.$$

Étape 2 : $\left(\text{Calcul de } \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > x) dx \right).$

Rappelons que l'on a $\mathbb{P}(T > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt dx \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dx dt \text{ (D'après Fubini Tonelli)} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3)$$

Et par un simple calcul de primitive, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4)$$

Étape 3 : $\left(\text{Calcul de } \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > x) dx \right).$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > x) dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n > \sqrt{n}x + n) dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n > t + n) dt \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \underbrace{\mathbb{P}(S_n > t + n)}_{=\mathbb{P}(S_n \geq n+k+1)} dt \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=n+k+1}^{+\infty} \frac{e^{-n} n^j}{j!} \quad (8)$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j-n-1} \frac{n^j}{j!} \quad (9)$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(j-n)n^j}{j!} \quad (10)$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{n+k}}{(n+k)!} \quad (11)$$

$$= \frac{e^{-n}n^{n+1}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} \quad (12)$$

$$= \frac{e^{-n}n^{n+1}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(n+k-n)n^{k-1}}{(n+k)!} \quad (13)$$

$$= \frac{e^{-n}n^{n+1}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{(n+k-1)!} - \frac{n^k}{(n+k)!} \quad (14)$$

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > x) dx = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}. \quad (15)$$

Et par suite on obtient bien :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

□

3 Phase de questions

1. — Jury : Au début de votre développement, vous utilisez une propriété sur la loi de la somme de lois de poisson. pouvez préciser ?
 - Moi : Oui on utilise le fait que la somme de variables aléatoires indépendantes suivant toute une loi de poisson suit une loi de poisson de paramètre la somme des paramètres.
 - Jury : Pourriez vous le démontrer ?
 - Moi : On va commencer par le faire pour 2 puis on effectuera une récurrence
 - Jury : Faites le simplement pour 2.
 - Moi : *Je pose mes calculs, je fais apparaître mon binôme de Newton, j'oublie juste de dire à quel moment j'ai utilisé l'indépendance.*
 - Jury : Pourriez vous justifier la deuxième ligne ?
 - Moi : Houlàlà oui j'ai oublié de dire que c'est ici qu'on utilise l'indépendance.
2. — Jury : Dans votre étape 2, comment interprétez vous le calcul que vous effectuez ?
 - Moi : On peut le voir comme le calcul d'une espérance.
 - Jury : Très bien. Dans cette même étape, vous avez dit que pour passer de l'équation (3) à l'équation (4) il fallait calculer une primitive. Si on enlevait le t devant l'exponentielle, est ce que vous sauriez faire ?
 - Moi : Sans le t on se retrouverait avec l'intégrale de Gauss et il faudrait alors calculer l'intégrale double
 - Jury : Pouvez vous détailler ?
 - Moi : Oui donc Fubini nous donne l'égalité suivante : $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
et on va passer ensuite en coordonnées polaires pour conclure...
 - Jury : Sans l'écrire pourquoi les coordonnées polaires vont nous aider ?
 - Moi : Le Jacobien va apparaître et nous ramener à un calcul de primitive.
 - Jury : Très bien. Toujours sur cette équation 3, comment interpréter vous l'intégrale ?

- Moi : Comme une espérance encore une fois.
- Jury : Oui de quelle variable aléatoire ?
- Moi : Une Gaussienne fois l'indicatrice de $\mathbb{R}_+$.
- Jury : Oui très bien.
- 3. — Jury : Dans votre étape 3, pourriez vous expliquer à nouveau l'accolade de la ligne (7) ?
- Moi : Oui donc on a à faire à une variable à valeurs entière donc être strictement plus grand que $t + n$ lorsque t est lui même plus grand que k c'est être au moins égal à $n + k + 1$.
- Jury : Très bien merci.
- 4. — Jury : Juste une dernière petite question : À quoi ça peut servir d'obtenir un équivalent de $n!$?
- Moi : Alors Je sais qu'en théorie des nombres, il nous faut souvent avoir des informations sur la fonction Γ d'Euler.
- Jury : Très bien merci on va passer aux questions sur le plan.
- 5. — Jury : Vous nous avez bien justifier la présence des lemmes de Borel-Cantelli dans la partie sur la convergence simple. Est ce que vous pourriez nous le démontrer.
- Moi : *Je l'ai fait texto parce que je le démontre dans l'un de mes autres dev et surtout je venais de le revoir pendant la préparation.*
- Jury : Merci bien.
- 6. — Jury : Pourriez vous nous démontrer l'exemple 14 de votre plan ? *L'exemple en question : La suite $X_n \sim \frac{1}{n}\delta_1 + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$ converge en probabilité vers 0 mais pas presque sûrement*
- Moi : Oui donc commençons par montrer la convergence en probabilité qui se voit bien (Je le fais sans problème). Pour la convergence presque sûre, si elle avait lieu, ce serait vers 0, Et la proposition 9 du plan nous permet de conclure. *La proposition en question était une condition nécessaire de convergence presque sûre.*
- Jury : Très bien merci.
- 7. — Jury : Dans votre développement, vous utilisez le théorème central limite ; connaissez vous une utilité de ce théorème, quelque chose d'important ?
- Moi : *Je n'ai pas trop compris la question mais je crois que j'ai vu la lumière et j'ai répondu : Je crois savoir que les statisticiens l'utilise pour déterminer des intervalles de confiance mais je ne sais pas faire. Le plus gros bluffe de toute mon existence car je ne connais même pas la définition d'un intervalle de confiance...*
- Jury : Oui très bien merci. On va passer à des exercices.

Exercice 1 :

- Jury : En utilisant une méthode analogue à celle de votre développement donc en utilisant les variables de poisson indépendantes et de paramètre 1, seriez vous capable de déterminer un équivalent de la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \right)$?

Remarque 3.1. Il faut que je fasse une remarque ici pour que vous vous rendiez compte de mon état mental au moment où j'entend cette question. Comme je l'ai déjà dit je suis passé sur cette leçon en oral blanc en décembre. Le développement j'avais eu l'occasion de le présenter lors d'un passage en classe sur une autre leçon et je sentais que l'oral avait déjà bien commencé. Et là, on en rajoute une couche en me posant l'un des exos que E. Russ et S. Rigat m'ont posé

en décembre et donc pour m'entraîner pendant la préparation je l'avais refait. Autant dire que je le connaissais par coeur. Mais, pour ne pas me cramer j'ai fait semblant d'utiliser l'indication et j'ai procédé à peu près en ces termes :

Moi : Comme indiqué, Posons (X_n) une suite de var. aléatoires indép. suivant toute une loi de poisson de paramètre 1.

Notons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

Notons également $\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k!}$.

On a alors S_n qui suit une loi de Poisson de paramètre n et on remarque alors que :

$$\Gamma_n = e^n \mathbb{P}(S_n \leq n) = e^n \mathbb{P}(S_n - n \leq 0) = e^n \mathbb{P}(T_n \leq 0).$$

Et d'après le théorème central limite, on a convergence en loi de T_n vers $\mathcal{N}(0, 1)$ et par symétrie de la loi normale, on obtient $\mathbb{P}(T_n \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ d'où,

$$\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}.$$

Exercice 2 :

Considérons une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Considérons la suite de variables aléatoire $X_n = (-1)^n X$. Étudiez les modes de convergence de cette suite.

Commençons par regarder la convergence presque sûre.

Soit $\omega \in \Omega$. La suite numérique $(-1)^n X(\omega)$ converge seulement pour $\omega = 0$ donc la convergence presque sûre n'a pas lieu.

Regardons maintenant la convergence en probabilité. *Là je patauge un peu, je propose une preuve par l'absurde.*

- Jury : Oui c'est une bonne idée, pour vous aidez si vous supposer que la suite X_n converge en probabilité, qu'est ce que vous pouvez dire de la suite X_{n+1} ?
- Moi : Elle converge aussi en probas vers la même limite.
- Jury : Est ce que vous pourriez utiliser ça pour déterminer la limite potentielle de la suite ?

Là je comprend :

Si on regarde la somme $X_{n+1} + X_n$, elle converge en probas vers 2 fois la limite. Comme $X_{n+1} + X_n = 0$, on alors $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en probabilité.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

On alors $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X| > \varepsilon) = \frac{1}{2}$. Donc la convergence en probas. n'a pas lieu.

FIN DE L'ORAL

Je propose quand même de finir l'exercice si ça intéresse des gens.

Le fait qu'il n'y ait pas convergence en probabilité assure qu'il n'y a pas convergence L^1 .

Il reste à considérer la convergence en loi. Pour ça, on travaille avec les fonctions caractéristiques.

Remarquons d'abord que $\varphi_{X_n}(t) = \varphi_X((-1)^n t)$.

D'autre part, on a $\varphi_X(t) = \text{sinc}(t)$ (On peut je pense le savoir sinon ça se retrouve tout seul c'est la transformée de Fourier de la fonction porte).

Et de là on en déduit que $\varphi_{X_n} = \varphi_X$ donc, la suite X_n converge en loi vers la loi unif. sur $[-1, 1]$.