170

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Application

k est un corps de caractéristique différente de 2. E un k-ev de dimension $1 \leq n < +\infty$.

I) Formes quadratiques sur E

1) Définition

Déf 1: Une forme bilinéaire sur E est une application $b : E \times E \to k$ tq, pour $x \in E$, $b(x, .) : E \to k$, $y \mapsto b(x,y)$ et $b(., x)$ sont linéaires. b est symétrique si $\forall x, y \in E$, $b(x,y) = b(y, x)$.

Déf 2: Une forme quadratique est une application $q : E \to k$ tq $\exists b : E \times E \to k$ bilinéaire symétrique tq $\forall x \in E$ $b(x,x) = q(x)$. b est alors unique : c'est la forme polaire de q, notée b_q. On note $Q(E)$ l'ens. des formes quadratiques sur E.

Prop 3: $\forall x, y \in E$, $b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$
$= \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$

Ex: $A \in S_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid A^T = A\}$. $q : k^n \to k$, $X \mapsto X^T A X$ $\in Q(k^n)$.

Rq 4: $q : E \to k$ $\in Q(E)$ ssi il existe $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ et $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E tq pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$,
$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$.

Déf 5: $q, q' \in Q(E)$ sont équivalentes ssi il existe $u \in GL(E)$ tq $\forall x \in E$, $q(x) = q'(u(x))$.

La formule $u \cdot q = q' : x \mapsto q(u^{-1}(x))$ définit une action de $GL(E)$ sur $Q(E)$. La classification des formes quadratiques sur E est la recherche des orbites de cette action. On notera $q \sim q'$ pour "q et q' équivalentes".

2) Aspects matriciels

$\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E, $q, q' \in Q(E)$.

Déf 6: La matrice de q dans la base $(e_1 \dots e_n)$ est $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} q = \left(b_q(e_i, e_j)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Prop 7: (i) $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} q \in S_n(k)$

(ii) $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ $q(x) = {}^tX \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} q X$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(iii) Si $A \in S_n(k)$, on peut définir une unique forme quadratique sur E tq $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} q = A$. Ainsi $Q(E)$ est un espace-vectoriel de dim $\frac{n(n+1)}{2}$.

Prop 8: $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} q$, $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} q'$.
$q \sim q' \iff \exists P \in GL_n(k)$ tq ${}^tPAP = A'$. On dit que A et A' sont congruentes. Classifier les formes quadratiques sur E revient à classifier $S_n(k)$ sous l'action de congruence.

Prop 9: $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E. $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$.
$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} q = P^T \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} q \, P$.

II) Orthogonalité et application ($q \in Q(E)$)

1) Définition

Def 10 : $x, y \in E$ sont q-orthogonaux si $b_q(x,y) = 0$. On note $x \perp^q y$.
Si $A \subset E$, l'orthogonal de A pour q est $A^{\perp q} = \{y \in E \mid \forall x \in E,\ b_q(x,y) = 0\}$. C'est un sev de E.

Def 11 : le noyau de q est $\ker q = E^\perp$. q est non dégénérée si $\ker q = \{0\}$.

Def 12 : $x \in E$ est isotrope si $q(x) = 0$. On note $Ti(q)$ l'ens des $x \in E$ isotropes. $Ti(q)$ est un cône de E.

Ex : $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ $\quad Ti(q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

Def 13 : On dispose d'une application $\varphi_q : E \to E^*$, $x \mapsto b(\cdot, x)$ linéaire. La matrice de φ_q entre $\mathcal{B}$ et la base duale $\mathcal{B}^*$ est aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q$. Le rang de q est le rang de φ_q.

Prop 14 : $\ker q = \ker \varphi_q$ et $\dim \ker q + rg(q) = n$.
q est non dégénérée ssi φ_q isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q \in GL_n(k)$.

Co 15 : q non dégénérée et F sev de E. $\dim F + \dim F^{\perp q} = n$

2) Bases orthogonales et classification

Def 16 : $F_1 \dots F_k$ sev de E. $F_1 \dots F_k$ sont q-orthogonaux si $\forall 1 \leq i \neq j \leq k$, $x \in F_i$, $y \in F_j$, $x \perp^q y$. Ils sont supplémentaires orthogonaux si ils sont aussi supplémentaires. On note alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} {}^{\perp q} F_i$.

Prop 17 : $q \in Q(E)$, F supplémentaire de $\ker q$. Alors $E = \ker q \oplus^{\perp q} F$ et $q|_{F \times F} \in Q(F)$ est non dégénérée. On suppose donc q non dégénérée dans la suite.

Prop 18 : F sev de E : $E = F \oplus^{\perp q} F^{\perp q}$ ssi $q|_{F\times F}$ est non dégénérée.

Def 19 : Une base $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ est q-orthogonale si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} {}^{\perp q} \langle e_i \rangle$.

Co 20 : E admet une base q-orthogonale. De plus, l'algorithme de Gauss permet de trouver une telle base : il existe $(f_1 \dots f_n)$ base de E^* et $\lambda_1 \dots \lambda_n \in k$ tq
$$q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^2. \quad (*)$$
Ex : $q : k^2 \to k$, $(x,y) \mapsto xy$ $\quad q(x,y) = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right)$

Thm 21 : Si $k = \mathbb{C}$, il existe une base de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = I_n$: le rang classifie $Q(E)$.

Thm 22 (Sylvester) : Si $k = \mathbb{R}$, il existe un unique couple (p, p') tq $p + p' = n$ et une base $\mathcal{B}$ de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{p'} \end{pmatrix}$. (p, p') est la signature de q. De plus, dans toute décomposition $(*)$, $p = |\{1 \leq i \leq n,\ \lambda_i > 0\}|$

Ex : $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ de signature $(2,1)$

Prop 23: Si q est de signature (p, p'), la dim max d'un sev totalement isotrope (ie $F \subset F^{\perp}$) est $\nu = \inf(p, p')$

Thm 24 (corps finis): $q \in Q(E)$. On appelle discriminant de q $\mathrm{disc}(q) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q) \in k^{\times}/(k^{\times})^2$

Alors si $|k| < +\infty$, le rang et le discriminant classifient $Q(E)$

Cor 25: p, p' premiers impairs distincts. On note P1

$$\left(\frac{p}{p'}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \text{ carré modulo } p' \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(p'-1)}{4}}$

III) Groupe orthogonal ($q \in Q(E)$ non dégénérée)

1) Cas général

Def 26: $u \in O(q)$ ssi $u \in GL(E)$ et $\forall x, y \in E,\ b_q(x,y) = b_q(u(x), u(y))$

Rq 27: Si $\mathcal{B}$ base de E, $u \in O(q) \iff {}^tU A U = A$ où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q$

Prop 28: $O(q)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. Si $u \in O(q)$, $|\det u| = 1$ et $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det u = 1\} \triangleleft O(q)$. $O(q)$ est le groupe orthogonal de q.

Ex 29: Si $x \in E$ non isotrope, s définie par $s(x) = -x$ et $s|_{\langle x\rangle^{\perp}} = \mathrm{id}_{\langle x\rangle^{\perp}}$ est dans $O(q)$: c'est la réflexion d'hyperplan $\langle x\rangle^{\perp}$, notée s_x. P2

Thm 30 (Cartan – Dieudonné): Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

2) Cas euclidien ($k = \mathbb{R}$)

Def 31: $q \in Q(E)$ est positive si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, définie si $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire, symétrique définie positive sur E.

Prop 32: Si q définie positive, $O(q) \simeq O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$.

Thm 33 (spectral): (i) $A \in S_n(\mathbb{R})$: $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \mid P^T A P$ soit diagonale
(ii) $q \in Q(E)$, $q' \in Q(E)$ définie positive: il existe $\mathcal{B}$ orthonormée pour q' et orthogonale pour q.

Prop 34: $\Phi: O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \longmapsto OS$ est un homéomorphisme.

Cor 35: $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ tq $\mathrm{Mat}_{can}\, q = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{p'} \end{pmatrix}$. On a un homéomorphisme $O(q) \simeq O(p) \times O(p') \times \mathbb{R}^{pp'}$.