Espaces complets. Exemples et applications

(X, d) désigne un espace métrique

I) Généralités sur les espaces complets

1) Définition et premiers exemples

Def 1: Une suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geq N, \; d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$

Ex: $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ définit une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$.

Prop 2: Si (x_n) est de Cauchy et a une valeur d'adhérence, elle converge.

Def 3: (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X converge.

Ex: $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, $(\mathbb{Q}, |.|)$ ne l'est pas.

Prop 4: Soit (X, d) complet et $F \subset X$ fermé. Alors (F, d) est complet.
Soit $Y \subset X$ un sous-espace complet par d, alors Y est fermé.

Prop 5: Soient $X_1 \dots X_p$ des espaces métriques complets et $X = X_1 \times \dots \times X_p$ l'espace métrique produit. Alors X est complet.

Cor 6: Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Prop 7: (X, d) complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

2) Lien avec la compacité, complétion

Prop 8: (X, d) est compact si il est complet et précompact ie
$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \dots x_N \in X \mid X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon).$

Rq: (X, d) précompact si de toute suite (x_n) on peut extraire une suite de Cauchy.

Thm 9: Soit (X, d) métrique. Il existe un espace complet (X', d) contenant X (à homéomorphisme près) et tq X est dense dans X'. C'est le complété de X et il est unique à homéomorphismes près.

Ex: $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.

Prop 10: Soit (X, d) métrique, (Y, d') complet. $(\mathcal{C}_b(X, Y), \|\cdot\|_\infty) = \{f : X \to Y$ continue bornée$\}$ est complet.
$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact$\}$ n'est pas complet. Son complété est $X' = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue de limite nulle en $\pm\infty\}$.

Cor 11: (X, d) métrique, $F \subset X$ dense, Y complet et $f : F \to Y$ uniformément continue. Il existe une unique $\tilde{f} : X \to Y$ uniformément continue tq $\tilde{f}|_F = f$.

Ex: La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ s'étend de manière unique à $L^2(\mathbb{R})$ (Plancherel)

3) Espaces de Banach.

Def 12: Un espace vectoriel normé complet pour sa norme est un espace de Banach.

Prop 13 : $(E, \|\cdot\|)$ un evn. E est un Banach ssi $\forall (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ $\sum \|u_n\|$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum u_n$ converge.

Ex : $\mathbb{R}^n$ est un Banach, $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ etc.

Thm 14 (Riesz - Fischer) : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{C}$ mesurables $| \int |f|^p d\mu\} / \{f : X \to \mathbb{C}$ mesurables tq $f = 0$ μ-pp$\}$

est un Banach pour la norme $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

$(1 \leq p < \infty)$

$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{C}$ mesurables $| f$ essentiellement bornée$\} / \{f = 0$ μ-pp$\}$

muni de $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid \exists A \subset X$ avec $\mu(A^c) = 0$ et $\forall x \in A$ $|f(x)| \leq M\}$ est un Banach.

II) Théorèmes d'existence et applications

1) Le théorème du point fixe

Thm 15 : (X, d) complet et $f : X \to X$ tq il existe $0 \leq k < 1$ tq $\forall x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ (*)

Alors f admet un unique point fixe x^* et pour tout $x_0 \in X$, $f^{\circ n}(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^*$.

Co 16 : Si (X, d) complet et $f : X \to X$ continue tq f^p vérifie (*) avec $p \geq 1$, alors f a un unique point fixe x^* et les itérés de f en $x_0 \in X$ convergent vers x^*.

Co 17 : U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne en sa seconde variable. Soit $(t_0, y_0) \in U$. Il existe $\alpha > 0$ tq le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$, $y'(t) = f(t, y(t))$ ait une unique solution sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Co 18 : I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, globalement lipschitz (localement) par rapport à seconde variable. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy $y' = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$.

Ex : I intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : I \to \mathbb{R}^n$ continues. Il existe une unique solution sur I à

$y(t_0) = y_0$, $y'(t) = A(t) y(t) + B(t)$.

Thm 19 : $f : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ où U ouvert de $\mathbb{R}^n$. $a \in U$ tq $df_a \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe O ouvert contenant a et V ouvert contenant $f(a)$ tq $f : O \to V$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

Co 20 : $\cdot$ $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists B \in \mathbb{C}[A] \mid \exp(B) = A$

$\cdot$ $\forall A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $\forall p \geq 1$, $\exists B \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \mid A = B^p$.

2) Espaces de Hilbert

Def 21 : Un espace préhilbertien qui est un Banache muni de sa norme euclidienne est dit espace de Hilbert.

Ex : $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert

Thm 22 $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ Hilbert et $C \subset H$ convexe fermé. Soit $x \in H$. Il existe un unique $p_C(x) \in C$ tq

$\|x - \pi_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x-y\|$. Il est caractérisé par $\pi_C(x) \in C$ et $\forall y \in C, \mathrm{Re}(\langle \pi_C(x) - x, y - x \rangle) \leq 0$.

Co 23 : E Hilbert, $F \subset E$. $F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x,y \rangle = 0\}$

. Si F est fermé, π_F est linéaire continue et $E = F \oplus F^{\perp}$

. $\overline{F} = E \iff F^{\perp} = \{0\}$

. $\forall f \in E^*, \exists ! x \in E \mid \forall y \in E, f(y) = \langle x, y \rangle$.

Ex : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé. X variable aléatoire positive ou intégrable, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Il existe une unique variable $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ tq $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-mesurable et $\forall A \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathbb{1}_A)$.

III) Théorème de Baire et application

1) Le théorème et ses premiers corollaires

Def 24 : (X,d) est de Baire si toute intersection dénombrable d'ouvert denses est dense.

. Un ensemble $A \subset X$ est un G_δ s'il contient une intersection dénombrable d'ouvert dense.

Thm 25 : Un espace complet est de Baire

Ex : $\mathbb{R}$ est de Baire, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un G_δ.

Co 26 : Un espace de Banach n'a pas de base algébrique dénombrable.

Co 27 : (X,d) métrique complet, (Y,d) métrique, (f_n) suite de fonction $X \to Y$ continue convergeant simplement. Alors $\{x \in X \mid f$ continue en $x\}$ est un G_δ.

Ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. f' est continue sur un G_δ dense.

Prop 28 : $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue $\mid f$ dérivable nulle part$\}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

2) Application en analyse fonctionnelle

Thm 29 (Banach-Steinhaus) : $(E, \|\cdot\|_E)$ Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn. $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E,F)^I$ (application linéaire continue).

Alors $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty \iff \forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$

Co 30 : Il existe $f \in \mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R})$ dont la série de Fourier diverge en 0.

Co 31 : $(E, \|\cdot\|)$ un Banach. $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si (x_n) converge faiblement vers x ie $\forall f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$, (x_n) est borné.

Thm 32 : E, F Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Si T est surjective, T est ouverte.

Co 33 : . E Banach, $u \in \mathcal{L}(E)$ bijective. u^{-1} est continue

. $GL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)$ bijective$\}$ est un ouvert.

. E, F Banach, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Ex : Si $F \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ sev fermé constitué de fonctions $\mathcal{C}^1$, F est de dimension finie.