Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

U désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

I) $\mathbb{C}$-dérivabilité, théorie de Cauchy et applications

$f : U \to \mathbb{C}$ application

Def 1 : f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$. On note ce complexe $f'(z_0)$.
f est holomorphe sur U si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout z_0 de U.

Ex : Une fonction développable en série entière sur $D(0,R)$ est holomorphe sur cet ouvert.

Cor 2 : Si f est analytique sur U, elle est holomorphe sur U.
De plus si $f(z) = \sum a_n (z-a)^n$ sur $D(a,r)$,
$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z-a)^{n-1} \text{ sur } D(a,r)$$

Thm 3 : On peut voir f comme une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(P(x,y), Q(x,y))$ tq $f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$. Alors E qv.
- f dérivable en $z_0 \in U$, $z_0 = a+ib$
- f est $\mathbb{R}$-différentiable en (a,b) et $df_{(a,b)}$ est $\mathbb{C}$-linéaire
- f est $\mathbb{R}$-différentiable en (a,b) et $\frac{\partial P}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a,b)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$ (Cauchy - Riemann).

Prop 4 : Le produit, la somme, la composée de fonctions holomorphes sur U est encore holomorphe sur U.

Ex : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
La représentation principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est holomorphe.

Def 5 : On note $H(U)$ l'ens des fonctions holomorphes sur U.

Ex : $z \mapsto \bar{z}$ $\notin H(\mathbb{C})$

2) Théorie de Cauchy et application

Def 6 : Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f \in H(U)$ on définit $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$.

Def 7 : $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ sont homotopes s'il existe $H : [0,1]^2 \to U$ continue tq $H(0,\cdot) = \gamma_0(\cdot)$, $H(1,\cdot) = \gamma_1(\cdot)$.
U est simplement connexe si tout lacet $\gamma : [0,1] \to U$ (ie $\gamma(0) = \gamma(1)$) est homotope comme lacet à un lacet constant.

Prop 8 : Si $\gamma : [0,1] \to U$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $f \in H(U)$,
$g : z \mapsto \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$.

Prop 9 : Si $f \in H(U)$ et T un triangle de U (ie γ lacet tq $\gamma([0,1])$ soit un triangle), $\int_T f(z)\,dz = 0$. (Goursat)

Thm 10 : Si $f \in H(U)$, f est analytique sur U. On a de plus : f $\mathcal{C}^\infty$ sur U avec $\forall z \in U$, $\forall r > 0$ tq $D(z,r) \subset U$, $\forall u \in D(z,r)$, $\forall n \geq 0$, $f^{(n)}(u) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{B(z,r)} \frac{f(a)\,da}{a-u}$

Cor 11 : Si $f \in H(\mathbb{C})$ est bornée, elle est constante.

Cor 12 : Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, P a une racine dans $\mathbb{C}$.

Thm 11 (Morera) : Si f est continue sur U et $\int_T f(z)\,dz = 0$ pour tout triangle $T \subset U$, alors $f \in H(U)$

Ex : $\Gamma(z) \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$

Cor 12 : Si U est connexe on a pour $f \in H(U)$:
- zéros isolés : si f s'annule $X \subset U$ où X a un point d'accumulation dans U, $f = 0$ sur U
- prolongement analytique : Si $X \subset U$ ouvert et $g \in H(X)$ vérifie

et si $f = g$ sur X alors $f = g$ sur U.

II) Propriétés des fonctions holomorphes

1) Application ouverte

Prop 13: Si U simplement connexe et $f \in H(U)$ ne s'annule pas, il existe $g \in H(U)$ tq $f = e^g$.

Thm 14: Si $f \in H(U)$ et $f'(z_0) \neq 0$ ($z_0 \in U$), il existe des ouverts V et W voisinages de z_0 et $f(z_0)$ tq $f : V \to W$ soit un biholomorphisme.

Cor 15: $f \in H(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$, $m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$. Il existe V, W voisinages de $a, f(a)$ et $\varphi : V \to W$ biholomorphisme tq $\forall z \in V$ $f(z) = a + \varphi(z)^m$, $\varphi(a) = 0$

Cor 16: $f \in H(U)$ est une application ouverte.

Thm 17: $f \in H(U)$ injective où U connexe. Alors f' ne s'annule pas sur U, f est un biholomorphisme sur $f(U)$ ouvert de $\mathbb{C}$.

2) Principe du maximum

Thm 18: $f \in \mathcal{O}(U)$. • si $|f|$ admet un maximum local en $a \in U$ alors f constante sur la composante connexe de U contenant a

• Si $K \subset U$ compact, $\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|$, idem pour $Re(f)$ et $Im(f)$

Rq: $Re f$ et $Im f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont harmoniques

Cor 19: Si $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorphe avec $f(0) = 0$ alors $\forall z \in B(0,1)$ $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. De plus si il y a égalité alors $\exists \lambda \in \mathbb{U}$ tq $f(z) = \lambda z$.

Cor 20: Les biholomorphismes de $B(0,1)$ sont les $z \mapsto e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in B(0,1)$.

3) Espaces de fonctions holomorphes

Il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts tq $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $\cup K_n = U$. On pose pour $f, g \in H(U)$, $d(f,g) = \sum_{n \geq 0} \min(1, \sup_{K_n} |f - g|) 2^{-n}$. C'est une distance sur $H(U)$

Prop 21: $f_n \to f$ dans $(H(U), d)$ ssi $f_n \to f$ uniformément sur tout compact de U.

Thm 22 (Weierstrass): Si $(f_n) \in H(U)^{\mathbb{N}}$ converge vers $f : U \to \mathbb{C}$ uniformément sur tout compact de U alors $f \in H(U)$ et $\forall k \geq 0$, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ dans $(H(U), d)$.

Ex: $\zeta : z \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} \in H(\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 1\})$.

Def 23: $\Omega \subset H(U)$ est normale si pour toute suite $(f_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$, il existe $f \in H(U)$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice tq $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ dans $(H(U), d)$.

Thm 24: Ω normale ssi $\forall K \subset U$ compact, $\exists M > 0$ $\forall f \in \Omega$, $\forall x \in K$, $|f(x)| \leq M$ (Montel)

Cor 25: Les compacts de $(H(U), d)$ sont les fermés bornés.

III) Méromorphie et applications

1) Fonctions méromorphes

Def 26: Une série de Laurent est une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$, $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Prop 27: $f \in H(U)$, $a \in U$, $V = \{z \in U \mid R_1 < |z - a| < R_2\} \subset U$. Il existe une unique série de Laurent convergente sur V tq $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$

Def 28 : $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. a est dit singularité (isolée de f). Il existe $r>0$ tq $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ pour $|z| < r$.

- si $a_n = 0$ pour $n<0$, a est dite singularité effaçable
- Si il existe $m<0$ tq $a_k = 0$ pour $k<m$, a est dit pôle de f
- Sinon a est une singularité essentielle.

Thm 29 : $f \in H(U\setminus\{a\})$. si f borné au voisinage de a, a est effaçable

- Si $|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$, a est un pôle
- Si a est essentielle $\forall \varepsilon>0$, $f(\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z-a|<\varepsilon\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Ex. les biholomorphismes de $\mathbb{C}$ sont les applications affines bijectives

Def 30 : $f : U \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ est méromorphe si f est holomorphe sur U' $\subset U$ avec $U\setminus U'$ discret et si tout point z_0 de $U\setminus U'$ admet un voisinage V_{z_0} sur lequel f est quotient de deux fonctions holomorphes

Ex : $z \mapsto e^{1/z}$ n'est pas méromorphe. Le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ l'est.

2) Formule des résidus

Thm 31 : Si U simplement connexe, $\gamma : [0,1] \to U$ et $f \in H(U)$, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Def 32 : Si $f \in H(U\setminus\{a\})$, le résidu de f en a est le coefficient a_{-1} dans son développement en série de Laurent autour de a : $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} f(u)\,du$

Ex : Si $f = \frac{g}{h}$ avec $g, h \in H(U)$, $h(a)=0$, $h'(a)\neq 0$,
$\mathrm{Res}(f,a) = g(a)/h'(a)$

Thm 33 (Résidus) : Si U simplement connexe et $(a_i) \in U^n$ n points distincts, $f \in H(U\setminus\{a_1 \dots a_n\})$, γ lacet de $U\setminus\{a_1\dots a_n\}$,
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f,a_i)\,\mathrm{Ind}(a_i,\gamma)$$

Ex : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(x+1)}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ $\quad 0<\alpha<1$

. Calculs d'intégrales de fractions rationnelles et de transformées de Fourier: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}}\,dx = \frac{\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|t|}$$

3) Théorème de Rouché et application

Def 34 $a \in U$, $f : U \to \mathbb{C}\cup\{+\infty\}$ méromorphe. L'ordre de f en a est $\mathrm{ord}(f,a) = \begin{cases} n & \text{si } a \text{ zéro d'ordre } n \\ -n & \text{si } a \text{ pôle d'ordre } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Thm 35 (Argument) U simplement connexe, f méromorphe sur U, $\gamma \subset U$ lacet évitant les zéros et pôles de f. Alors
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \sum_{a \text{ à l'intérieur de } \gamma} \mathrm{Ind}(a,\gamma)\,\mathrm{ord}(f,a)$$

Cor 36 (Rouché) : U ouvert, $\overline{D(a,r)} \subset U$, f, g méromorphes sur U sans pôles ni zéros sur $\partial D(a,r)$ et $|f-g| < |f|$ sur $\partial D(a,r)$. Alors dans $D(a,r)$, $\#\text{zéros} f - \#\text{pôles} f = \#\text{zéros} g - \#\text{pôles} g$.

Cor 37 ([illegible] **)** Sous les mêmes hypothèses, si $(f_n) \in H(U)^{\mathbb{N}}$ tend vers f et si les (f_n) sont injectives, f est injective ou constante.

Thm 38 : $U \subsetneq \mathbb{C}$ simplement connexe. U est biholomorphe à $B(0,1)$. (Riemann)