E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I) Généralités sur les espaces vectoriels normés (evn)

1) Norme, distance, topologie

Def 1: $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une norme si (i) $\forall x \in E$ $N(x) = 0 \iff x = 0$ (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
(iii) $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
(E, N) est un espace vectoriel normé (evn)

Ex: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un evn.

Def 2: N et N' deux normes sur E sont équivalentes si il existe $C > 0$ tq $\forall x \in E$, $\frac{N(x)}{C} \leq N'(x) \leq C\, N(x)$

Prop 3: $(E, \|\cdot\|)$ un evn. $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E qui en fait un espace métrique. Une base d'ouverts de E est donnée par les boules $\mathcal{B}(x, r) = \{y \in E \mid \|x-y\| < r\}$ pour $x \in E$, $r > 0$.

Rq: Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ normes sur E sont équivalentes, elles engendrent la même topologie.

Ex: $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un evn. $(1 \leq p \leq \infty)$

2) Cas de la dimension finie

Prop 4 (Bolzano-Weierstrass): Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ où $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, sont les fermés bornés.

Cor 5: Si $\dim E < +\infty$, toutes les normes sur E sont équivalentes et les compacts de E sont les fermés bornés.

Ex: Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$ est une norme: toutes les normes p sont équivalentes.

Thm 6 (Riesz): E est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte

Ex: Soit $F \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ fermé constitué de fonctions $\mathcal{C}^1$. Alors F est de dimension finie

Cor 7: E un evn, $F \subset E$ de dim finie. F est fermé et pour $x \notin F$, $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ est atteinte en $y_0 \in F$.

II) Applications linéaires continues ($(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn)

1) Généralités

Def 8: $f : E \to F$ est continue en $x \in E$ ssi $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ $\forall y \in \mathcal{B}_E(x, \eta)$, $f(y) \in \mathcal{B}_F(f(x), \epsilon)$. f est continue si elle l'est en tout $x \in E$.

Thm 9: Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Équivalence entre :
(i) u continue (ii) u continue en 0 (iii) $\exists C > 0$ $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$ (iv) u bornée sur la boule unité de E.

On note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Si $E = F$, $L(E, F)$ est noté $L(E)$

Def 10: Si $u \in L(E, F)$, $\|u\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty$ est une norme sur $L(E, F)$ dite norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Prop 11: $\forall u, v \in L(E)$, $x \in E$, $\|u(x)\|_E \leq \|u\|_{L(E)} \|x\|_E$
$\|u \circ v\|_{L(E)} \leq \|u\|_{L(E)} \|v\|_{L(E)}$: $\|\cdot\|_{L(E)}$ est une norme d'algèbre.

Ex: $u : (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f$ est continue et $\|u\| = 1$

2) Cas de la dimension finie

Thm 12: Soit E de dimension finie et F un evn. Toute application linéaire de E dans F est continue et sa norme est atteinte en x_0 tq $\|x_0\|_E = 1$.

Cor 13 : $\dim E < +\infty$ et $(e_1 \dots e_n)$ base de E.
$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \quad (x_1 \dots x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$
est un homéomorphisme linéaire.

Cor 14 : $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang fini ie $\dim u(E) < +\infty$.
Alors équivalence entre (i) u est continue (ii) $\ker u$ est fermé dans E

Cor 15 : $E_1 \dots E_n$ evn de dim finie et $u : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ multilinéaire. Alors u est continue.

Ex : Sur $M_n(\mathbb{R})$ le produit, la transposition, l'inverse sur $GL_n(\mathbb{R})$ ... sont continues. $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$ est compact.

Rq : Si $\dim E = n < +\infty$, $\mathcal{L}(E) = L(E)$ s'identifie à $M_n(\mathbb{R})$ et on peut définir de la même manière des normes d'algèbres sur $M_n(\mathbb{R})$

Ex : Si $\|(x_1 \dots x_n)\| = \sup |x_i|$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_{L(\mathbb{R}^n)} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

3) Cas des formes linéaires

Def 16 : $u \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est une forme linéaire sur E
On note $\hat{E}$ l'espace des formes linéaires sur E et
$E^* = L(E,\mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires continues sur E.

Prop 17 : $u \in \hat{E}$ est continue ssi $\ker u$ est fermé.
Dans le cas contraire $\ker u$ est dense dans E.

Rq : Un hyperplan de E est fermé ou dense dans E.

Cor 18 : Si $\dim E < +\infty$ $\hat{E} = E^*$

Thm 19 (Hahn-Banach) : Soit $p : E \to \mathbb{R}$ tq $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour $\lambda > 0$ et $x \in E$ et $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $x,y \in E$.
Soit G un sous-espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ forme linéaire tq $\forall x \in G$, $g(x) \le p(x)$.
Alors $\exists f \in \hat{E} \mid f|_G = g$ et $\forall x \in E$ $f(x) \le p(x)$

Cor 20 : F sev de E, $g \in F^*$ (continue) : il existe $f \in E^*$ tq $f|_F = g$ et $\|f\|_{L(E,\mathbb{R})} = \|g\|_{L(F,\mathbb{R})}$

Cor 21 : $j : E \longrightarrow E^{**}$ est une isométrie.
$$x \mapsto (f \mapsto f(x))$$
Si elle est surjective, E est dit réflexif.

Cor 22 : $F \subset E$ est dense ssi $\forall f \in E^*$, $f|_F = 0 \Rightarrow f = 0$.

Ex : Les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ sont réflexifs (Admis)
Si $0 < \alpha < 1$, la suite $u_\alpha = (\alpha^n)_{n \ge 0}$ engendre un sous-espace dense de $c_0 = \{(u_n)_{n \ge 0} \mid u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\}$.

Def 23 : Un hyperplan fermé H est un ensemble $f^{-1}(\{\alpha\})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in E^*$. Si $A, B \subset E$, H sépare A et B au sens large si on a $f(x) \le \alpha$ $\forall x \in A$ et $f(x) \ge \alpha$ $\forall x \in B$.

Lemme 24 : Si $C \subset E$ convexe ouvert avec $0 \in C$, on pose $p(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in C\}$ pour $x \in E$. Alors p vérifie les hypothèses du théorème 19 et il existe M tq $p(x) \le M\|x\|$ $\forall x \in E$.

Cor 25 : $A, B \subset E$ convexes non vides disjoints et A ouvert. Alors il existe $f \in E^*$ séparant A et B au sens large. **D1**

$\to$ applications à la minimisation de fonctions sur les convexes.

III) Cas des espaces de Banach (E, F evn)

1) Espaces vectoriels normés complets

Def 26 : E est un espace de Banach ssi il est complet pour sa norme.

Ex : Tout evn de dimension finie est complet.

Prop 27 : Si $K \subset E$ compact et F un Banach, $(\mathcal{E}(K,F), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

Si F est un Banach, $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est un Banach.

Ex : E^* est un Banach.

Thm 28 : $(E, \|\cdot\|)$ est un Banach ssi toute série de E normalement convergente est convergente.

Ex : $e^A = \sum \frac{A^n}{n!}$ est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et continue.

Plus généralement si E Banach, $u \in \mathcal{L}(E)$, $e^u \in \mathcal{L}(E)$ est bien défini.

Thm 29 : E un evn, $F \subset E$ sev dense et G un Banach. Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$: $\exists! \tilde{u} \in \mathcal{L}(E, G) \mid \tilde{u}|_F = u$.

Ex : La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ s'étend à $L^2(\mathbb{R})$ (Plancherel)

Thm 30 (Riesz-Fischer) : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré : $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est complet pour $1 \leq p \leq +\infty$.

2) Applications linéaires continues (E Banach)

Thm 31 (Baire) : $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ouverts denses dans E. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est dense dans E.

Ex : $\{f \in \mathcal{E}([0,1], \mathbb{R}) \mid f$ dérivable nulle part$\}$ est dense dans $\mathcal{E}([0,1], \mathbb{R})$

Thm 32 (Banach-Steinhaus) : E Banach, F evn et $(T_i)_{i \in I}$ famille de $\mathcal{L}(E, F)$. Alors $(T_i)_{i \in I}$ bornée $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$, $(T_i(x))_{i \in I}$ bornée.

Cor 33 : Il existe $f \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ dont la série de Fourier diverge en 0.

Cor 34 : E, F evn, (T_n) suite d'opérateurs continus qui converge simplement vers T : $T \in \mathcal{L}(E, F)$

(ii) $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\forall f \in E^*$, $f(x_n) \to f(x)$ où $x \in E$ fixé. Alors (x_n) bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|$

Thm 35 (Application ouverte et graphe fermé) (i) E, F Banach et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Alors u est ouverte.

(ii) $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dont le graphe est fermé dans $E \times F$: u est continue.

Cor 36 : E Banach : $GL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u$ bijectif$\}$ est un ouvert stable par inverse.

Ex : La transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

3) Espaces de Hilbert

Def 37 : $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ espace préhilbertien est un espace de Hilbert si $(H, \|\cdot\|)$ est un Banach.

Ex : $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert.

Thm 38 : $C \subset H$ Hilbert convexe fermé. $x \in E$. Il existe un unique $p_C(x) \in C$ tq $\|x - p_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$. Il est caractérisé par $\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0$ pour $y \in C$

Cor 39 : F sev fermé de H Hilbert. $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$

(i) p_F est linéaire continue de norme 1

(ii) $E = F \oplus F^\perp$, $F^{\perp\perp} = F$

(iii) $\forall f \in E^*$, $\exists! x \in E \mid f = \langle \cdot, x \rangle$ (Riesz)

D2

Application 40 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{A}$, X v.a. positive ou L^1. Il existe une unique v.a. $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-mesurable tq $\forall A \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mathbb{1}_A)$