157

Matrices symétriques réelles. Matrices Hermitiennes

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle , \rangle$. $\mathbb{C}^n$ de son produit Hermitien $(\ )$.

I) Généralités

1) Matrices symétriques réelles, formes quadratiques

Def 1: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $A^T = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Prop 2: $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ en est un supplémentaire.

Prop 3: $A \in S_n(\mathbb{R})$ $q_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T A X$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de forme bilinéaire associée $b_A : (X,Y) \mapsto X^T A Y$. Réciproquement si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, $\exists! q \in S_n(\mathbb{R})$ où $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$. On a un isomorphisme$^{\mathcal{B}}$ entre $S_n(\mathbb{R})$ et l'ens. des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$.

Def 4: $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$. A et A' sont congruentes si $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $P^T A P = A'$ si q_A et $q_{A'}$ sont deux formes quadratiques équivalentes.

Rq 5: $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $S_n(\mathbb{R})$ via $(P,A) \mapsto P^T A P$. Les orbites sont les classes de congruence de $S_n(\mathbb{R})$. Les déterminer revient à classifier les formes quadratiques réelles.

2) Matrices Hermitiennes - Formes hermitiennes

Def 6: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est Hermitienne si $\overline{A}^T \overset{def}{=} A^* = A$. On note $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Rq 7: De même, $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-ev de dim n^2 (mais pas un $\mathbb{C}$-ev) et on a une correspondance entre $H_n(\mathbb{C})$ et formes Hermitiennes sur $\mathbb{C}^n$ via $q_U : X \mapsto \overline{X}^T U X$ pour $U \in H_n(\mathbb{C})$. $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur $H_n(\mathbb{C})$ via $(P,U) \mapsto \overline{P}^T U P$ et les classes sont les classes de congruence de $H_n(\mathbb{C})$

II) Réduction

1) Bases q-orthogonales - classification

Prop 8: Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, ou hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ q-orthogonale ie si $e_i, e_j \in \mathcal{B}$ avec $i \neq j$ $b(e_i, e_j) = 0$. $\mathcal{B}$ est donnée par l'algorithme de Gauss.

Ex: $q_1 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ Hermitienne
$$(x,y,z) \mapsto |x|^2 + |y|^2 - 2i\bar{x}y + 2ix\bar{y} + 2y\bar{z} + 2\bar{y}z$$
$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\}$ est q_1-orthogonale.

Thm 9 (Sylvester): (i) $A \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (r,q) avec $0 \leq r, q \leq n$, appelé signature de A tq $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $P^T A P = \begin{pmatrix} I_r & & (0) \\ & -I_q & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $U \in H_n(\mathbb{C})$: il existe un unique couple (r,q), $0 \leq r, q \leq n$ tq $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $\overline{P}^T A P = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

De plus la méthode de Gauss donne ce couple (r,q)

Ex: La signature de q_1 est $(2,1)$.

Cor 10: Il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ orbites pour l'action de congruence sur $S_n(\mathbb{R})$ ou $H_n(\mathbb{C})$: la signature classifie entièrement ces matrices pour la congruence.

2) Théorème spectral - point de vue endomorphismes $(E, \langle , \rangle)$ espace euclidien

Déf 11: $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. De même pour $(E, (.))$ espace hermitien.

Prop 12: $A \in S_n(\mathbb{R})$: $u_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto AX$ est autoadjoint pour $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$. De même pour $U \in H_n(\mathbb{C})$.

Prop 13: u autoadjoint dans $\mathcal{L}(E)$, et F sev de E stable par u. $F^\perp$ est stable par u.

Thm 14 (Spectral): (i) $A \in S_n(\mathbb{R})$: il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ $(P^T = P^{-1})$ et $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ie A est diagonalisable dans une base orthonormée

(ii) $U \in H_n(\mathbb{C})$: il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ $(\bar{P}^T = P^{-1})$ ~~et~~ $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\bar{P}^T U P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Cor 15 (Réduction simultanée): (i) q forme quadratique sur E : il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E au sens de $\langle , \rangle$ et q-orthogonale.

(ii) q Hermitienne : on a le même résultat pour ~~les~~ produit hermitien $(,)$.

App 17: Coniques du plan euclidien : Une conique propre à centre (d'image non vide) s'écrit dans un repère orthonormé d'origine le centre : (i) soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)

(ii) Soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Hyperbole) (classification euclidienne des coniques)

Si une conique propre n'a pas de centre de symétrie, son équation dans un repère orthonormé est $y^2 = 2px$, $p > 0$

Rq 18: On classifie de même les quadriques de l'espace.

Prop 19 (quotients de Rayleigh): $A \in S_n(\mathbb{R})$

$\min Sp(A) = \min_{\|X\|_2 = 1} \langle AX, X\rangle$, $\max Sp(A) = \max_{\|X\| = 1} \langle AX, X\rangle$.

Plus généralement si $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A,

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \subset \mathbb{R}^n \\ \dim F = k}} \left(\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|_2 = 1}} \langle AX, X\rangle \right) = \max_{\substack{F \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim F = n-k+1}} \left(\min_{\substack{x \in F \\ \|x\| = 1}} \langle AX, X\rangle \right)$$

Prop 20: $A \in S_n(\mathbb{R})$: $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| = \sup_{\|X\|_2 = 1} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}$.

Déf 21: (i) $A \in S_n(\mathbb{R})$ est positive si q_A est positive ssi $\forall X \in \mathbb{R}^n$ $X^T A X \geq 0$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ens des matrices symétriques positives.

(ii) $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si q_A est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $X^T A X > 0$.

Rq 22: On a les notions similaires pour $H_n(\mathbb{C})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$.

Prop 22: (i) $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ssi $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

(ii) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi q_A de signature $(n, 0)$ ssi $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Rq 23: $S_n^+(\mathbb{R})$ est convexe, fermé dans $S_n(\mathbb{R})$. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ convexe ouvert dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

Ex: $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. $\exists! B \in S_n^+(\mathbb{R}) \mid B^2 = A$.

Rq 24 : $A\in S_n(\mathbb{R})$: $A\in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall 1\le k\le n$, $\det\left((A_{ij})_{1\le i,j\le k}\right) > 0$. (Sylvester)

Prop 25 : $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B\in S_n(\mathbb{R})$. $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ tq $P^T A P = I_n$ et $P^T B P$ soit diagonale.

App 26 (i) $\det : S_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe.
(ii) $K\subset\mathbb{R}^n$ compact, convexe, $\mathring{K}\neq\emptyset$: il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

III) Applications

1) Décompositions matricielles, exponentielles

Thm 27 (Polaire) : $\phi : O_n(\mathbb{R})\times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S)\mapsto OS$

est un homéomorphisme. Idem pour $GL_n(\mathbb{C}) \simeq H_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$

Ex. (i) $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \{M\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid |||M|||_2 \le 1\}$.
(ii) $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$

Thm 28 (Cholesky) : $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$: $\exists T\in T_n^{++}(\mathbb{R})$ (triangulaire supérieure à coeff diagonaux >0) tq $A = T^T T$ (idem pour $H_n^{++}(\mathbb{C})$).

Thm 29 : exp : $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

2) Calcul différentiel

Prop 30 (Schwarz) : U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, $a\in U$

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n} \in S_n(\mathbb{R}) \quad \text{(Hessienne).}$$

Elle est associée à la différentielle seconde de f en a.

Thm 31 : $f : U\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, $a\in U$ tq $df(a) = 0$
(i) Si f admet un minimum local en a, $Hf(a)$ est positive
(ii) Si $Hf(a)\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, a est un minimum local.

Thm 32 (Morse) : $f : U\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$, $0\in U$. On suppose $df(0)=0$, $f(0)=0$ et $Hf(0)\in GL_n(\mathbb{R})$ de signature $(p, n-p)$. Il existe un $\mathcal{C}^1$-difféo $x\mapsto \varphi(x)$ entre deux voisinages de 0 tq $\varphi(0)=0$ et

$$f(x) = \varphi_1^2(x)+\dots+\varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \dots - \varphi_n^2(x)$$

→ étude de la position relative avec le plan tangent.

3) Probabilités ($(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace de probabilités)

Def 33 $X = (X_1 \dots X_n)$ vecteur aléatoire. La matrice de covariance de X est $\mathrm{Cov}(X) = \left(\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\right)_{1\le i,j\le n}$

Prop 34 : $\mathrm{Cov}(X)\in S_n^+(\mathbb{R})$ et si $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$\mathrm{Cov}(AX) = A\,\mathrm{Cov}(X)\,A^T$

Def 35 : $X : \Omega\to\mathbb{R}^n$ est gaussien si pour tout $t\in\mathbb{R}^n$, $\langle X, t\rangle$ suit une loi Gaussienne.

App 36 : $A\in S_n^+(\mathbb{R})$: il existe un vecteur gaussien de moyenne $m\in\mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance A. Le couple (m, A) caractérise la loi d'un vecteur gaussien.