250

Transformée de Fourier. Applications

I) La Théorie L^1

$n \geq 1$ entier, on se place sur $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définitions et premières propriétés

Def 1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier est $\mathcal{F} f = \hat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \int \hat{f}_n(y) e^{-i x \cdot y} dy$$

où $x \cdot y$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Prop 2 (Riemann-Lebesgue) : Soit $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} \mid f$ continue et $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0\}$. Alors si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue.

Prop 3 (règle de calcul) : $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x \rangle = \sqrt{1 + \|x\|^2}$.

- Si $\langle \cdot \rangle^k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et si $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$, $(-i)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha (\mathcal{F} f)(y) = \mathcal{F}(\cdot^\alpha f)(y)$ (convention de calcul diff standard)
- si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\widehat{f(\lambda \cdot)} = |\lambda|^{-d} \hat{f}(\lambda^{-1} \cdot)$
- On note $\tau_a f : x \mapsto f(x+a)$: $\widehat{\tau_a f}(y) = e^{i a \cdot y} \hat{f}(y)$
- $\mathcal{F}(e^{-i a \cdot} f)(y) = \tau_a \mathcal{F}(f)(y)$.

Rq : $\mathcal{F}$ « échange » régularité et décroissance.

Ex 4 : $\sigma > 0$. $g_\sigma : x \longmapsto e^{-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}}$; Alors $\hat{g}_\sigma(x) = (2\pi)^{n/2} \sigma^n e^{-\frac{\sigma^2 \|x\|^2}{2}}$

Def 5 : Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on définit pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy. \text{ Alors } f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Rq 6 : On peut définir de la même façon $f * g \in L^2$ si $f \in L^2$ et $g \in L^1$, et $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Prop 7 : $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f * g}(x) = \hat{f}(x) \hat{g}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

2) Inversion

Def 8 : On note $E = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.

Rq 9 : E contient $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} \mid f\ \mathcal{C}^\infty$ à support compact$\}$.

Thm 10 (Inversion) : Soit $f \in E$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{i x \cdot y}\, dy.$$

Cor 11 : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ injective.

Ex : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tq il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x+\lambda)$. Alors $f = 0$.

Ex : $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ L^1. $f(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int g(y) e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} dy$ est solution de $\partial_t f - \frac{1}{2} \Delta f = 0$.

3) Cas des mesures de probabilités

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace de probabilité.

Def 12 : $X : \Omega \to \mathbb{R}$ variable aléatoire. La fonction caractéristique de X est

$$\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto E(e^{itX})$$

Thm 13 : X, Y v.a.r sur Ω. Si $\phi_X = \phi_Y$ alors X et Y ont même loi.

Thm 14 (Lévy) : (X_n), X v.a.r sur Ω. On suppose que (ϕ_{X_n}) converge vers ϕ_X simplement. Alors $X_n \to X$ en loi.

Ex : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ avec Y constante p.s.
Alors $(X_n, X_n) \to (X, Y)$ p.s.

Co 15 (TCL) : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.r i.i.d tq $E(X_1^2)<+\infty$
Alors
$$\frac{(X_1 + \dots + X_n) - nE(X_1)}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
où $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$

I) Cadre $L^2(\mathbb{R}^n)$

1) Prolongement à L^2

Prop 16 : $E = \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Prop 17 : Si $f \in E$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ avec
$$\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2.$$

Thm 18 (Plancherel) : La transformée de Fourier sur E s'étend en une application linéaire continue $\hat{\sigma} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tq :

- $\forall f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\sigma} f = \hat{f}$.
- $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\hat{\sigma} f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$.

De plus $\hat{\sigma}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$ d'inverse
$$f \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\sigma} f(-\,\cdot).$$

Ex : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \pi$.

2) Application

Thm 19 : On définit pour $n \geq 0$, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ et $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$. Alors pour $n \geq 0$, $H_n' = 2nH_{n-1}$
$H_{n+1} = (2x - \frac{d}{dx}) H_n$. $\{\psi_n, n \geq 0\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $\mathcal{F}$.

Thm 20 (Shannon) : Soit $BL^2(\mathbb{R}) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{\sigma} u = 0$ p.s sur $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \}$. Alors BL^2 est un Hilbert et
$$BL^2 \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad u \mapsto (u(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$
est une isométrie.
Si $u \in BL^2$ est continue, pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) \frac{\sin(x-k)}{x-k}$

Def 21 : On définit $H_2(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists g, h \in L^2(\mathbb{R}) \mid \forall \phi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$, $\int f \phi' d\lambda = -\int g \phi\, d\lambda$ et $\int f \phi'' d\lambda = \int h \phi\, d\lambda \}$.

D1

Prop 22 : Si $f \in H_2(\mathbb{R})$, g et h sont uniques relevés f' et f''.

On a alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f')(x) = -ix\mathcal{F}f(x)$ et $\mathcal{F}(f'')(x) = -x^2\mathcal{F}f(x)$. On a $H_2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid$

$$\int |\hat{f}(x)| (1+x^2)^2 \, dx < +\infty \}.$$

Prop 23 : Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un unique $g \in H_2(\mathbb{R})$ tq $g - g'' = f$.

III) Espace de Schwartz réels

1) Définition

Def 24 : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou que c'est à décroissance rapide si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k \varphi^{(p)}(x)$ est bornée.

On pose alors $\forall (k,p) \in \mathbb{N}^2$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $N_{k,p}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\varphi^{(p)}(x)|$. Alors

$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k,p \geq 0,\ N_{k,p}(\varphi) < +\infty \}$

c'est l'espace de Schwartz.

Prop 25 : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors
- f' et $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- $\forall p \geq 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$

Ex : $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Rq 25 : les $N_{k,p}$ sont des semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'une topologie associée à ces semi-normes (convergence uniforme de $f^{(n)}$ par exemple)

2) Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Prop 26 : Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Thm 27 : La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même d'inverse $\varphi \mapsto \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}(-\cdot)$

App 28 : formule sommatoire de Poisson : Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n)$$

Cette formule permet de retrouver l'inversion de Fourier.

Rq 29 : Le prolongement à L^2 peut s'obtenir également grâce à $\hat{f}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

3) Cas des fonctions à support compact

Prop 30 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ non nulle à support compact, $\hat{f}$ n'est pas à support compact.

Thm 31 (Paley - Wiener) :
- Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset [-r,r]$. Alors il existe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe tq $\cdot F|_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}\varphi$ et

$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C}, |F(z)| \leq C(1+|z|)^{-N} e^{r|\text{Im} z|}$

- réciproquement si $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe vérifie $(*)$ alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tq

$$\begin{cases} \text{supp}(\varphi) \subset [-r,r] \\ \hat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

D2