Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

191

I) Algèbre linéaire et géométrie

1) Espaces affines et applications

E désigne un $\mathbb{R}$-ev de dim $n \geq 1$.

Déf 1: Un ensemble $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E s'il existe $\Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$, $(A, B) \mapsto \vec{AB}$ tq

- $\forall A \in \mathcal{E}$, $\Theta_A : B \mapsto \vec{AB}$ est bijective de $\mathcal{E}$ vers E
- $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$, $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ (Relation de Chasles)

Ex: • E est naturellement un espace affine de direction E
• $\vec{AB} = \vec{A'B'} \Leftrightarrow \vec{AA'} = \vec{BB'}$ (parallélogramme)

Rq 2: $A \in \mathcal{E}$, $u \in E$. L'unique B tq $u = \vec{AB}$ se note $A + \vec{u}$.

Déf 3: $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine (sea) si $\mathcal{U} \neq \emptyset$ et s'il existe $A \in \mathcal{U}$, F sev de E tq $\mathcal{U} = A + F$.
$\mathcal{U}$ est alors un espace affine de direction F.

Ex: Par deux points $A \neq B$ de $\mathcal{E}$, passe une unique droite.

Déf 4: Deux sea $\mathcal{U}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si $F = G$.

Déf 5 (Barycentre): $A_1 \dots A_n \in \mathcal{E}$, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.
$\exists! \, G \in \mathcal{E} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$. On note
$G = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$. Alors $\forall M \in \mathcal{E}$,
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \vec{MG}$.

App 6: Les médianes d'un triangle ABC sont concourantes en G, isobarycentre de ABC.

Déf 7 (repère): $(A_0 \dots A_n)$ repère affine si $(\vec{A_0A_1}, \dots \vec{A_0A_n})$ base de E. Dans ce cas, si $M \in \mathcal{E}$,
$\exists! \, (\lambda_0 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0} \lambda_i = 1$ et $M = \mathrm{Bar}((A_0, \lambda_0) \dots (A_n, \lambda_n))$.
(coordonnées barycentriques)

App 8: Théorème de Ménélaüs (annexe 1.1)

Prop 9: $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ non vide est un sea si $\mathcal{U}$ stable par barycentre.

2) Applications affines - groupe affine

$\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ affines de direction E et E'

Déf 10: $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est une application affine si $\exists \vec{\varphi} \in \mathcal{L}(E, E')$ tq $\forall A, B \in \mathcal{E}$, $\vec{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}(\vec{AB})$. $\vec{\varphi}$ est unique: c'est la partie linéaire de φ.

Prop 11: • L'image d'un sea par φ affine est un sea de $\mathcal{E}'$.
• φ affine envoie $\mathrm{Bar}((A_1, \lambda_1) \dots (A_n, \lambda_n))$ sur $\mathrm{Bar}((\varphi(A_1), \lambda_1) \dots (\varphi(A_n), \lambda_n))$ pour $A_1 \dots A_n \in \mathcal{E}$, $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum \lambda_i \neq 0$

Ex: Les projections sur un sous-espace, les translations, les symétries, les homothéties sont affines (annexe 1.2)

Prop 12: On peut définir une unique application affine envoyant un repère affine sur $n+1$ points donnés.

Co 13: • Théorème de Thalès (annexe 1.3)
• Théorème de Pappus: A, B, C points de $\mathcal{D}$ une droite, A', B', C' points de $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$. Si $(A'B) \parallel (B'A')$ et $(BC') \parallel (CB')$ alors $(AC') \parallel (CA')$
• Théorème de Desargues: ABC, $A'B'C'$ triangles sans sommets communs et à côtés respectivement parallèles. Alors (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Prop 14: φ affine. $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{A \in \mathcal{E} \mid \varphi(A) = A\}$ est vide ou un sev de direction $\ker(\vec{\varphi} - id_E)$. Si $\ker(\vec{\varphi} - id) = \{0\}$, c'est un singleton.

Prop 15: On note $GA(\mathcal{E}) = \{\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid \varphi$ affine et bijective$\}$. $(GA(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe dit groupe affine. $\{\varphi \in GA(\mathcal{E}) \mid \vec{\varphi} \in \{\lambda\, id_E, \lambda \in \mathbb{R}^*\}\} \triangleleft GA(\mathcal{E})$. C'est le groupe des homothéties translations.

II) Groupes, coniques et géométrie ($\mathcal{E}$ de direction E)

1) Groupe orthogonal et applications

Si $(E, \langle , \rangle, \|\cdot\|)$ est euclidien, on dit que $\mathcal{E}$ est euclidien. On le munit d'une distance $d(A,B) = \|\vec{AB}\|$.

Def 16: $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$ ssi $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
$\varphi \in Aff(\mathcal{E})$ isométrie si $\forall A, B \in \mathcal{E}$, $d(A,B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$ ssi $\vec{\varphi}$ isométrie. On note $O(E)$ l'ens. des isométries de E, $Isom(\mathcal{E})$ celui des isométries de $\mathcal{E}$.

Ex: les reflexions orthogonales sont dans $O(E)$, $Isom(\mathcal{E})$ (annexe 1.4)

Prop 17: $(O(E), \circ)$ et $(Isom(\mathcal{E}), \circ)$ sont des groupes

Prop 18: Si $\mathcal{B}$ BON de E, $\Psi_{\mathcal{B}} : u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}\, u$ est un isomorphisme de $O(E)$ sur $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$

Def 19: $u \in O(E)$ est directe si $\det u = 1$.
$\varphi \in Isom(\mathcal{E})$ est un déplacement si $\vec{\varphi}$ directe. Sinon, c'est un antidéplacement.

Prop 20: $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\} \triangleleft O(E)$ et $\Psi_{\mathcal{B}}$ envoie $SO(E)$ sur $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$. Si E est orienté, $u \in SO(E) \iff u \in O(E)$ et u préserve l'orientation.

Thm 21 ($n=2$): $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ via $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
C'est un groupe abélien. Si $\dim E = 2$, $SO(E)$ est abélien. Si E est orienté, $SO(E) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ canoniquement.

Def 22 (angles orientés): $SO(E)$ agit fidèlement et transitivement sur $S(E) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Un angle orienté $\widehat{(u,v)}$ est une orbite de $S(E) \times S(E)$ via l'action diagonale de $SO(E)$. $\Psi : SO(E) \to \mathcal{A} = \{$ens des angles orientés$\}$
$$r \mapsto \widehat{(x, r(x))}$$
ne dépend pas de x et est bijective. Par transport $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe abélien. Si E orienté, $(\mathcal{A}, +) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ canoniquement (mesure d'un angle orienté)

Rq 23: On définit la notion d'angles orientés de droites et leur mesures éléments de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

App 24: . la somme des angles géométriques d'un triangle vaut π
. A, B, C, D alignés ou cocycliques ssi $((AB),(CD)) = ((CB),(DX))$ (annexe 1.5)

App 25: ABC, $A'B'C'$ triangles. (cf annexe 1.6). EQU
- $\exists \varphi \in Isom(\mathcal{E}) \mid \varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$
- $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. $\hat{A} = \hat{A'}$, $c = c'$, $b = b'$
- $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $c = c'$ (égalité des triangles)

Def 26: $u \in Aff(\mathcal{E})$ est une similitude directe si u préserve les orientations de vecteurs. Si elle les renverse, c'est une similitude indirecte.

Thm 27: u similitude ssi $\exists k > 0 \mid \forall x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$

ssi $u = (\lambda\, id) \circ n$, $n \in O(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Ex 28 (triangles semblables) : ABC, $A'B'C'$ sont semblables ssi $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$ ssi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Thm 29 : $u \in O(E)$ est produit d'au plus n réflexions. $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est produit d'au plus $n+1$ réflexions. Les réflexions sont conjuguées dans $O(E)$ et si $n \geq 3$, dans $SO(E)$. $Z(O(E)) = \{\pm id_E\}$ et si $n \geq 3$, $Z(SO(E)) = \{\pm id_E\} \cap SO(E)$

Cor 30 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

2) Extension de corps

Def 31 : $M \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est constructible élémentairement à partir de $S \subset \mathbb{C}$ si c'est l'intersection de deux droites non confondues définies par 2 paires de points de S, ou l'intersection de deux cercles sécants définis par deux centres dans S et des rayons donnés par les éléments de S

. M est constructible ssi $\exists M_0 \in \{0,1\}, \dots, M_n = M$ tq $\forall i \in [\![0,n]\!]$, M_i constructible élémentairement à partir de M_{i-1}.

On note : $\mathcal{E}$ l'ensemble des points constructibles.

Thm 32 (Wantzel) : $y \in \mathcal{E} \iff \exists K_0 = \mathbb{Q} \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$ une tour d'extension de corps tq $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$ et $y \in K_n$.

Thm 33 (Gauss-Wantzel) : $e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{E} \iff n = 2^{\alpha} p_1 \cdots p_r$ où $\alpha \geq 0$, $r \geq 0$, $p_1 \dots p_r$ premiers de Fermat distincts.

Ex : • la duplication du cube et la quadrature du cercle sont impossibles

• le polygone régulier à 17 côtés est constructible.

III) Algèbre bilinéaire et géométrie ($\mathcal{E}$ affine de direction E)

On suppose connues les propriétés des formes quadratiques réelles, notamment celle de réduction simultanée.

Def 34 : $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré 2 s'il existe $O \in \mathcal{E}$, q forme quadratique sur E, $L_0 \in E^*$ et $c_0 \in \mathbb{R}$ tq $\varphi(M) = q(\vec{OM}) + L_0(\vec{OM}) + c_0$. q ne dépend pas de O.

Une quadrique affine est une classe d'équivalence de polynômes de degré 2 proportionnels, identifiée à $\{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) = 0\}$. Si $\dim E = 2$, on parle de coniques

Def 35 : Une quadrique est à centre si q non dégénérée et propre si $(u,y) \mapsto q(u) + L_0(u)y + c_0 y^2$ non dégénérée sur $E \times \mathbb{R}$.

Thm 36 : Une conique propre à centre s'écrit dans un repère orthonormé soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse) soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)

Si elle est propre sans centre, elle s'écrit $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé (parabole).

Thm 37 : Soit C une conique propre d'image non vide. Il existe un repère dans lequel une équation de $\mathcal{E}$ a une (et une seule des formes) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 1$, $y^2 = x$.

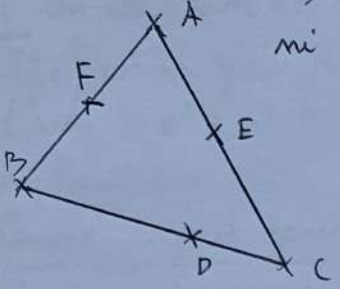
L'image d'une conique par une application affine est une conique de même type.

App 38 (ellipse de Steiner). ABC triangle. Il existe une unique conique tangente à ABC en ses milieux. Ses foyers sont les racines de P' où $P = (X-a)(X-b)(X-c)$, a, b, c affixes de A, B, C.

Annexe des figures

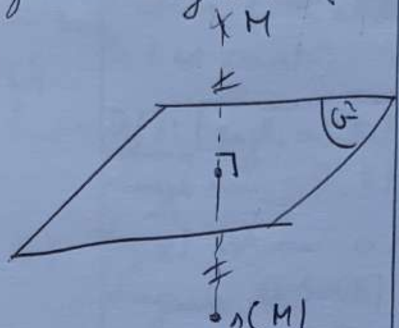
Thm de Ménélaüs :

D, E, F alignés ssi $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$



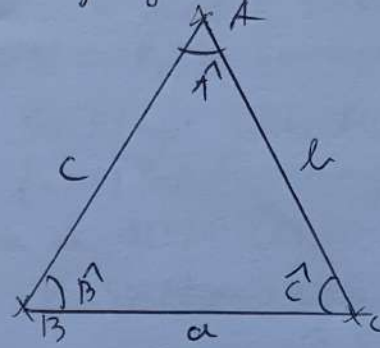
1.1

réflexion orthogonale :



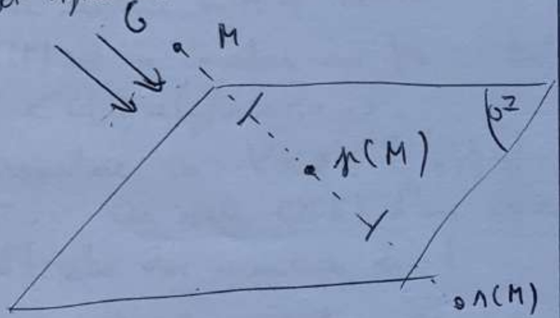
1.4

triangle générique



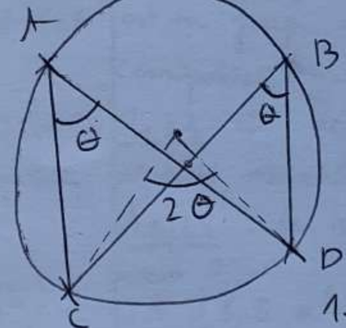
1.6

projection et symétrie :

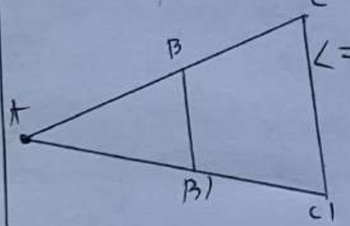


1.2

Thm de l'angle inscrit :

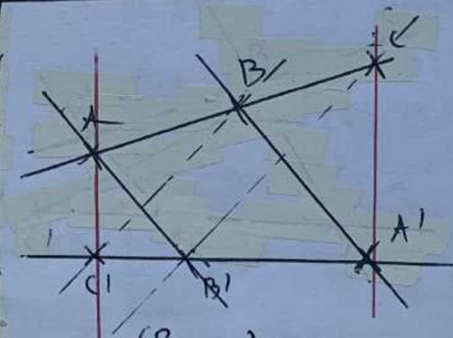


1.5



$(BB') \parallel (CC') \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}$

(Thalès)



(Pappus)

1.3