Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

K corps, E K-ev de dim $n < +\infty$

I) Généralités

1) Définitions

Déf 1: F sev de E. F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$.
$(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$: F stable par $(u_i)_{i \in I}$ si $\forall i \in I, u_i(F) \subset F$.

Ex: F, G sev tq $E = F \oplus G$. p projecteur sur F // G.
F et G sont stables par p. $\{0\}$ et E sont stables par $(u)_{u \in \mathcal{L}(E)}$.

Déf 2: Si F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, u induit un endomorphisme de F $u_F : F \longrightarrow F$, $x \longmapsto u(x)$. C'est l'endomorphisme induit par u sur F.

Interprétation matricielle : $\mathcal{B}_1 = \{e_1 \dots e_r\}$ base de F, $\mathcal{B}_2 = \{e_{r+1} \dots e_n\}$ base de G tq $E = F \oplus G$. F stable par u ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2} u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ $A \in \mathcal{M}_r(K)$

Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1} u_F$.

Prop 3: Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ stables par v.

2) Droites stables, réduction $(u \in \mathcal{L}(E))$

Déf 4: $\lambda \in K$ est valeur propre (vp) de u ssi $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x) = \lambda x$. x est alors un vecteur propre de u et associé à λ. $\langle x \rangle$ est une droite stable par u et réciproquement rechercher les droites stables par u revient à chercher les valeurs propres de u.

Déf 5: Si $\lambda \in K$, $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est le sous-espace propre de u associé à λ. Il est stable par u.

Déf 6: $\chi_u(X) = \det(X \mathrm{id}_E - u) \in K[X]$ est le polynôme caractéristique de u.

Prop 7: $\lambda \in K$ est valeur propre de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$

Prop 8: Si $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $uv = vu$, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Déf 9: $\lambda \in K$. Le sous-espace caractéristique de u associé à λ est $C_\lambda(u) = \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{id}_E)^n\right)$. Il est stable par u.

Déf 10: u est diagonalisable ssi $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ où $\mathrm{Spec}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u.

Déf 11: Un drapeau maximal de E est une suite de sev $F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E$ avec $\dim F_i = i$ pour tout i.
u est trigonalisable ssi il existe un drapeau maximal de E constitué de sous-espaces stables par u.

Prop 12: $1 \leq k \leq n-1$: Si u stabilise tous les sous-espaces de dimension k, u est une homothétie.

3) Matrices compagnons $(u \in \mathcal{L}(E))$

Prop 13: $x \in E$. $\langle x \rangle = \mathrm{Vect}\{u^k(x), k \geq 0\}$ est le plus petit sous-espace stable par u contenant x.

Prop 14: $I_x = \{P \in K[X] \mid P(u)(x) = 0\} \triangleleft K[X]$, $I \neq \{0\}$. On note $\Pi_{u,x}$ son générateur unitaire dit polynôme minimal ponctuel de x. Alors $\dim \langle x \rangle = \deg \Pi_{u,x}$ et $\{x, u(x) \dots u^{\deg \Pi_{u,x} - 1}(x)\}$ est une base de $\langle x \rangle$

Déf 15: u est cyclique ssi $\exists x \in E \mid \langle x \rangle = E$

Déf 16 : $P \in K[X]$ unitaire de degré n. $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.
La matrice compagnon de P est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Elle vérifie $\chi_{C_P} = \pi_{C_P} = P$ (π_u ou π_A désigne le polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $A \in \mathcal{M}_n(K)$)

Prop 17 : u cyclique ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = C_{\chi_u}$ dans une base $\mathcal{B}$.

Cor 18 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$ (Cayley - Hamilton)

Prop 19 : u n'a que $\{0\}$ et E comme sous-espace stable ssi χ_u irréductible.

II) Recherche de sous-espaces stables ($u \in \mathcal{L}(E)$)

1) Exemples

Prop 20 : Si u nilpotent d'indice n, les sous-espaces stables par u sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$, $0 \leq k \leq n$.

Ex : $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique a une infinité de sous-espaces stables.

Prop 21 : K infini. u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables ssi u cyclique.

2) Supplémentaires stables

Rq 22 : F stable par u a un supplémentaire G stable par u ssi il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$ de E avec $\{e_1 \dots e_k\}$ base de F et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ $A \in \mathcal{M}_k(K)$

Déf 23 : $u \in \mathcal{L}(E)$. ${}^t u : E^* \to E^*$, $f \mapsto f \circ u$ est la transposée de u. ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$.

Prop 24 : Si F stable par u, $F^\perp = \{f \in E^* \mid f|_F = 0\}$ stable par ${}^t u$.

Cor 25 : u a une droite stable ssi u a un hyperplan stable.

Cor 26 : u trigonalisable ssi χ_u scindé.

Déf 27 : $K = \mathbb{R}$, $(E, \langle , \rangle)$ euclidien. L'adjoint de u est l'unique endomorphisme de E tq $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.
u est normal ssi $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Prop 28 : Si u normal, F stable par u. $F^\perp$ est stable par u.

Prop 29 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (E $\mathbb{R}$-ev quelconque), u a une droite ou un plan stable.

Thm 30 : u normal. Il existe $\lambda_1 \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$, $a_1, b_1 \dots a_t, b_t \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & N(a_1,b_1) & \\ & & & & \ddots \\ (0) & & & & & N(a_t,b_t) \end{pmatrix} \text{ où } N(a_i,b_i) = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$$

Déf 31 : u est semi-simple ssi tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Prop 32 : u diagonalisable $\Longleftrightarrow$ χ_u scindé et u semi-simple.

Thm 33 : u semi-simple ssi π_u est sans facteur carré.

3) Familles d'endomorphismes

Thm 34 : G sous-groupe fini de $GL(E)$, F stable par G. Alors F admet un supplémentaire stable par G.

P1

Thm 35 : $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ tq $\forall i \in I$, u_i diagonalisable et $\forall i, j \in I$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ tq $\forall i \in I$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u_i$ est diagonale.

Rq 36 : On a une prop similaire pour la trigonalisation.

Ex : On suppose $\mathrm{Car}(K) \neq 2$. $GL_n(K) \simeq GL_m(K)$ ssi $n = m$.

III) Décomposition en sous-espaces stables ($u \in \mathcal{L}(E)$)

1) Réduction de Jordan

Thm 37 (décomposition des noyaux) : $P_1 \dots P_r \in K[X]$ premiers entre eux, $P = P_1 \dots P_r$. $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$, ces espaces sont stables par u et les projecteurs sont des polynômes en u.

Cor 38 : u diagonalisable ssi Π_u scindé à racines simples.
Si u diagonalisable et F stable par u, u_F est diagonalisable.

Cor 39 : Si u diagonalisable, les sous-espaces stables par u sont les sommes de droites stables par u.

Thm 40 (Dunford) : Si χ_u scindé, λ valeur propre de u, $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{n_\lambda}$. On a $C_\lambda(u) = \ker((u - \lambda \mathrm{id}_E)^{n_\lambda})$, $\dim C_\lambda(u) = n_\lambda$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} C_\lambda(u)$.

On peut écrire $u = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd = dn$ de façon unique.

Def 41 : $J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(K)$

Thm 42 (Jordan) : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, il existe une unique partition $(p_1 \dots p_r)$ de n avec $p_1 \leq \dots \leq p_r$ et une base $\mathcal{B}$ de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} J_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_r} \end{pmatrix}$

App 43 : $A \in \mathcal{M}_n(K)$, A et A^T sont semblables.

2) Réduction de Frobenius

Prop 44 : Il existe $x \in E$ tq $\Pi_u = \Pi_{u,x}$ et $\forall x \in E$, $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$.

Cor 45 : u cyclique ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = C_{\chi_u}$ ssi $\Pi_u = \chi_u$.

Thm 46 : $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une unique suite $P_1 \dots P_r \in K[X]$ avec P_i unitaires, $P_1 \mid \dots \mid P_r$ et une base $\mathcal{B}$ de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$

App 47 : $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, L/K extension. Si A, B semblables sur $\mathcal{M}_n(L)$, elles le sont dans $\mathcal{M}_n(K)$.

P2 (ecrit…)