201

Espaces de fonctions
Exemples et applications

1/3

I) Fonctions continues sur un compact

(K,d) espace métrique compact

1) Définitions et premières propriétés

Déf 1: $f : K \to (Y,d')$ métrique est continue en $x \in K$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall y \in K, d(x,y) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$.
f est continue sur K si elle continue en tout $x \in K$.
On note $C(K,Y) = \{f : K \to Y \mid f \text{ continue sur } K\}$.

Ex: $K = [a,b]$ $Y = \mathbb{R}$: continuité usuelle sur $\mathbb{R}$.

Prop 2: Si $f, g \in C(K,Y)$, $E = \{d'(f(x),g(x)), x \in K\}$ est borné et sup E est atteint en $x_0 \in K$.
$C(K,Y)$ est alors métrique par
$$d_{C(K,Y)}(f,g) = \sup_{x \in K} d'(f(x),g(x))$$

Prop 3: Si Y est complet, $(C(K,Y), d_{C(K,Y)})$ aussi.
Si Y est un Banach, $C(K,Y)$ aussi pour
$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|_Y$. Si Y est une algèbre, $C(K,Y)$ aussi.
En particulier, une limite uniforme de fonctions continues sur K est continue.

Ex: Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n \geq 0} e^{-nx^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$

Application 4: Cauchy-Lipschitz: E un espace de Banach et $F : E \to E$ tq $\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u-v\|$ $\forall u,v \in E$ $(L \geq 0)$
Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,E)$ unique telle que:
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u) \text{ sur } [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

2) Théorèmes fondamentaux

Thm 5 (Heine): $f \in C(K,Y)$. f est uniformément continue.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x,y \in K, d(x,y) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$.

Ex: $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Alors f se prolonge par continuité sur $[0,1]$.

Thm 6 (Dini): $Y = \mathbb{R}$. $(f_n) \in C(K,Y)^{\mathbb{N}}$ croissante. Si (f_n) converge vers $f \in C(K,Y)$ sur K alors $f_n \to f$ dans $C(K,Y)$.

Thm 7 (Ascoli): Y complet. $A \subset C(K,Y)$. $\bar{A}$ est compacte ssi:
- $\forall x \in K$, $\{f(x), f \in A\} \subset Y$ est compact.
- Equicontinuité: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall f \in A, \forall x,y \in K, d(x,y) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$.

Ex: $M > 0$: $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ M-lipschitz$\}$ est compacte dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

Application 8: $T : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(s)\,ds\right)$ est un opérateur compact.

Thm 9 (Stone-Weierstrass): $A \subset C(K,\mathbb{R})$ une sous-algèbre tq pour tous $x,y \in K$, $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$ si $x \neq y$ il existe $f \in A$ tq $f(x) = a$, $f(y) = b$.
Alors $\bar{A} = C(K,\mathbb{R})$.
Si $A \subset C(K,\mathbb{C})$ vérifie les mêmes hypothèses et si

$\forall f \in A$, $\bar{f} \in A$ alors $\bar{A} = C(K, \mathbb{C})$.

Corollaire 10 (Weierstrass) : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. f est limite uniforme de polynômes à coefficients réels.

Ex : L'ensemble des polynômes trigonométriques $\sigma[e^{ix}, e^{-ix}]$ est dense dans $\mathbb{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$ (Fejér).

• $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$B_n(f) \to f$ uniformément.

II) Espaces L^p

1) Généralités

Def 11 : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré. Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit

$$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \int |f|^p d\mu < \infty\} \Big/ \left(\begin{matrix} f \sim g \Leftrightarrow \\ f = g \ \mu\text{-pp} \end{matrix}\right)$$

et $L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \exists M > 0 \mid |f| \leq M \ \mu\text{-pp}\}$.

On pose : • $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid |f| \leq M \ \mu\text{-pp}\}$ sur $L^\infty(X)$

• $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ sur $L^p(X)$. bien définis.

Thm 12 : $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $L^p(X)$ qui en fait un espace de Banach (Riesz-Fischer).

Corollaire 13 : $L^2(X)$ est un espace de Hilbert.

Application 14 (Radon-Nikodym) : Soit λ, μ deux mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$ tq $\lambda \ll \mu$ (absolue continuité). Alors il existe une unique h μ-mesurable positive tq $\forall E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \int_E h \, d\mu$.

Rq : C'est encore vrai si λ est une mesure complexe.

Application 15 : espérance conditionnelle : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé. σ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. $X \geq 0$ ou intégrable : il existe une unique v.a $\mathbb{E}(X|\sigma)$ σ-mesurable tq

$$\forall A \in \sigma, \ \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\sigma) \mathbb{1}_A).$$

2) Cas Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$

Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, les espaces se réfèrent aux fonctions sur Ω. λ est la mesure de Lebesgue. $1 \leq p < \infty$.

Thm 16 (densité) : $C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ continue à support compact$\}$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Application 17 : $f \in L^p$, $y \in \mathbb{R}^N$. $\tau_y f = f(\cdot - y) \in L^p$.

Alors $\tau_y f \xrightarrow[y \to 0]{} f$ dans L^p.

Def 18 : On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n \geq 0}$ tq $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{Supp}\, \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$.

Rq : On pose $\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$ et

$\rho_n(x) = C n^N \rho(nx)$ $C = (\int \rho)^{-1}$ est une suite régularisante.

Thm 19 : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\rho_n * f \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$

où $e_n * f : x \mapsto \int f(y)\, e_n(x-y)\, dy$.

Corollaire 20 : $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert. $C_c^\infty(\Omega)$ dense dans $L^p(\Omega)$.

Ex : $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(n) = \int f(x)\, e^{inx}\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(Lemme de Riemann-Lebesgue).

3) Application en analyse fonctionnelle

Thm 21 (Riesz) : $1 < p < \infty$. Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$. φ forme linéaire sur $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$, continue : $\varphi \in (L^p)'$. Alors $\exists!\, u \in L^q$ tq $\forall f \in L^p$, $\varphi(f) = \int u f\, d\lambda$. $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

$(L^p)'$ est isométrique à L^q.

Thm 22 (Plancherel) : La transformation de Fourier réalise une isométrie de $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ dans L^2 pour $\|\cdot\|_2$, donc se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. Cette isométrie est bijective.

Def 23 : $L^2(\mathbb{T}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ 2\pi\text{-périodiques } \lambda\text{-p.p. tq } \int_0^{2\pi} |f|^2\, d\lambda < \infty \}$ et $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2\, d\lambda \right)^{1/2}$.

C'est un Hilbert.

Thm 24 : Pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \mapsto e^{inx} \in L^2(\mathbb{T})$. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Corollaire 25 : Si $u \in L^2(\mathbb{T})$, la série de Fourier (S_u) définie par $S_u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle e_n, u \rangle e_n$ converge vers u dans $L^2(\mathbb{T})$.

$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle e_n, u \rangle e_n$ et $\|u\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle e_n, u \rangle|^2$.

Ex : $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

III) Espace de fonctions holomorphes

$\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert. On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. Soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite exhaustive de compacts de Ω ($\bigcup K_n = \Omega$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$)

Def 26 : Si $f, g \in \Omega$, on pose $p_n(g) = \sup_{z \in K_n} |g(z)|$ et $d(f,g) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \min(1, p_i(f-g))$. C'est une distance sur $\mathcal{O}(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{d} f$ ssi $f_n \to f$ uniformément sur tout compact de Ω.

D1 Thm 27 (Weierstrass) : Si $(f_n) \in \mathcal{O}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $f_n \to f$ uniformément sur tout compact de Ω, alors $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\forall k \geq 0$, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Rq 28 : $(\mathcal{O}(\Omega), d)$ est complet. C'est un espace stable par dérivation. Il n'est pas normable.

D2

Thm 29 (Montel) : $H \subset \mathcal{O}(\Omega)$. Alors H est relativement compact ssi pour tout compact $K \subset \Omega$, la famille $(f(K))_{f \in H}$ est bornée pour la distance uniforme. Une telle famille est dite normale.