

Prop Soit $a \in]n, +\infty[$. Alors

$$\zeta(a) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^a}}$$

1. Convergence du produit

Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres premiers.

$$P_n = \prod_{i=0}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^a}} \quad \text{Alors}$$

$$P_n \text{ CV} \Leftrightarrow \ln(P_n) \text{ CV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)}_{\geq 0} \quad \text{CV}$$

$$\text{et } -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right) \sim \frac{1}{p_i^a}$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_i^a} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \text{ CV (Riemann)}$$

donc (P_n) CV.

2. Déf de la fonction zeta

$$\text{on note donc } \zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

Soit $(\mathbb{N}^+, \mathbb{P}(\mathbb{N}^+))$, on pose:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\zeta(a)} \prod_{p \in A} \frac{1}{p^a}$$

normalisé dans la loi de proba

En particulier, pour \mathbb{N}^+ :

$$\mathbb{P}(\mathbb{N}^+) = \frac{1}{\zeta(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \frac{1}{\zeta(a)} \zeta(a)$$

3. Indépendance des $\mathbb{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}$

Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ $2=2$ distincts.

Rappel $P_i \perp P_j \Leftrightarrow P_i \cap P_j = \emptyset$
(Euler)

Alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P_1 \cap \dots \cap P_n) &= \mathbb{P}(P_1 \cap \dots \cap P_n) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \cap \dots \cap P_n) = \frac{1}{\zeta(a)^n} \prod_{p \in P_1 \cap \dots \cap P_n} \frac{1}{p^a} \\ &= \frac{1}{\zeta(a)^n} \prod_{p \in P_1 \cap \dots \cap P_n} \frac{1}{p^a} \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(P_1) \dots \mathbb{P}(P_n)$$

Donc les $\mathbb{P}(A)$ sont mutuellement indépendants.

4. Application du TCLN

En particulier les $\mathbb{P}(A)$ sont P.I.

$$\begin{aligned} \text{Posons } A_n &= \bigcap_{k=1}^n (\mathbb{N}^+ - p_k \mathbb{N}^+) \\ &= \mathbb{N}^+ \setminus \bigcup_{k=1}^n (p_k \mathbb{N}^+) \end{aligned}$$

d'où $A_n \searrow$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ par TCLN.

$$\mathbb{P}(\text{hasard}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$\text{P.I. } \searrow = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\mathbb{N}^+ - p_k \mathbb{N}^+) = 1 - \frac{1}{\zeta(a)}$$

$$= \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^a}\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\text{aucun nombre premier}) = 0$

$$\text{et } \mathbb{P}(\emptyset) = \frac{1}{\zeta(a)}$$

d'où par continuité de l'écrite:

$$\zeta(a) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^a}}$$

Application Soit $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}([1, n])$ inde.

$$\text{Alors } \tau_n = \mathbb{P}(a \wedge b = 1) \rightarrow \frac{6}{\pi^2}$$

Notons $B_p = \{p \nmid a \wedge b\}$.

$$\text{Alors } C_n = \bigcap_{p \in P} B_p = \{a \wedge b = 1\}$$

et $\mathbb{P}(C_n) = 1$.

Or les B_p sont P.I. d'où

$$\begin{aligned} \tau_n &= \mathbb{P}(C_n) = \prod_{p \in P} \mathbb{P}(p \nmid a \wedge b) \\ &= 1 - \mathbb{P}(p \mid a \wedge b) \\ &= 1 - \mathbb{P}(p \mid a) \mathbb{P}(p \mid b) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \mathbb{P}(p \mid a) = \frac{\#\{p \leq m\}}{m} = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor$$

$$\text{Or } \frac{1}{p} - \frac{1}{m} \leq \frac{\#\{p \leq m\}}{m} \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{d'où } \prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq \tau_n \leq \prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{m}\right)$$

$$\downarrow_{n \rightarrow \infty} \quad \tau_n = \frac{6}{\pi^2} = \tau_n$$

$$\text{Or } 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right)^2 \leq 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{m}$$

$$\text{d'où } \tau_n = \prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3m}\right)$$

$$\leq \prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3m}\right) \text{ mais}$$

$$\log\left(\prod_{p \leq m} \left(1 + \frac{1}{3m}\right)\right) \leq \sum_{p \leq m} \frac{1}{3m} = \frac{\#\{p \leq m\}}{3m}$$

$$\downarrow_{n \rightarrow \infty} \quad \text{d'où } \prod_{p \leq m} \left(1 + \frac{1}{3m}\right) \rightarrow 1$$

Or conclut par encadrement. \square

$P \in]1, +\infty[$. Alors

$$\zeta(P) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^P}}$$

1. Convergence du produit

Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers.

$$P_n = \prod_{i=0}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^P}} \quad \text{Alors}$$

$$P_n \text{ CV} \Leftrightarrow \ln(P_n) \text{ CV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^P}\right)}_{> 0} \quad \text{CV}$$

$$\text{et } -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^P}\right) \sim \frac{1}{p_i^P} \quad i \rightarrow +\infty$$

$$\text{Or } P_n > n \text{ donc } \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_i^P} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^P} \text{ CV (Riemann)}$$

donc (P_n) CV.

2. Déf. de la fonction zêta

$$\text{On note donc } \zeta(P) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^P}$$

Sur $(\mathbb{N}^+, \mathcal{P}(\mathbb{N}^+))$, on pose:

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(P)} \frac{1}{n^P}$$

normalisé dans la loi de proba.

En particulier, pour $h \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{P}(h | \mathbb{N}^+) = \frac{1}{\zeta(P)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(hn)^P} = \frac{1}{h^P}$$

3. Indépendance des $\mathcal{P} | \mathbb{N}^+$, $P \in \mathbb{P}$.

Soient $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ $2=2$ distincts.

Rappel $P_i | h$ et $P_j | m \Leftrightarrow P_i - P_j | m$
(Euclide)

Alors

$$\mathbb{P}(P_1 | \mathbb{N}^+ \cap \dots \cap P_n | \mathbb{N}^+)$$

$$= \mathbb{P}(P_1 | \mathbb{N}^+) \dots \mathbb{P}(P_n | \mathbb{N}^+) = \frac{1}{(P_1 - P_n)^P}$$

$$= \frac{1}{P_1^P} \dots \frac{1}{P_n^P}$$

$$= \mathbb{P}(P_1 | \mathbb{N}^+) \dots \mathbb{P}(P_n | \mathbb{N}^+)$$

Donc les $\mathcal{P} | \mathbb{N}^+$ sont mutuellement indépendants.

4. Application du TCLM

En particulier, les $\overline{\mathcal{P} | \mathbb{N}^+}$ sont Π -I

$$\text{Posons } A_n = \bigcap_{h=1}^n (\mathbb{N}^+ - \mathcal{P}_h | \mathbb{N}^+)$$

$$= \mathbb{N}^+ - \bigcup_{h=1}^n (\mathcal{P}_h | \mathbb{N}^+)$$

d'où $A_n \downarrow$

$(\mathbb{N}^*) = \frac{1}{(p_1 \cdot p_2 \dots)^2}$
 $\frac{1}{p_1^2} \frac{1}{p_2^2}$
 $P(p_1 | \mathbb{N}^*)$
 sont mutuellement
 TCM
 (\mathbb{N}^*) sont P.I.
 $(\mathbb{N}^* - p_1 \mathbb{N}^*)$
 $(\mathbb{N}^* - \bigcup_{h=1}^n p_h \mathbb{N}^*)$

donc $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ - Par TCM.
 $P(\lim A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$
 P.I. $\rightarrow = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{h=1}^n P(\mathbb{N}^* - p_h \mathbb{N}^*)$
 $= 1 - \frac{1}{p_1^2}$
 $= \prod_{h=1}^{+\infty} 1 - \frac{1}{p_h^2}$

Or $\lim A_n = \{ \text{entiers divisible par aucun} \}$
 $\text{nombre premier} \}$
 $= \{1\}$
 et $P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(1)}$
 donc par continuité de l'inverse :
 $\zeta(1) = \prod_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_h^2}}$

Application Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
 $a, b \mapsto \mathcal{U}([1, n])$ inde.
 Alors $\pi_n = P(anb=1) \rightarrow \frac{6}{\pi^2}$
 Notons $B_p = \{ p \nmid a \wedge b \}$.
 Alors $C_n = \bigcap_{\substack{p \in P \\ p \leq n}} B_p = \{ anb=1 \}$
 et $P(C_n) = 1$.
 Or les B_p sont P.I. - donc
 $\pi_n = \prod_{p \leq n} P(p \nmid a \wedge b)$.
 $= 1 - P(p | a \wedge b)$
 $= 1 - P(p|a)P(p|b)$.
 Or $P(p|a) = \frac{|\{h \leq n : p|h\}|}{n} = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$

Or $\frac{1}{p} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{1}{p}$
 donc $\prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \leq \pi_n \leq \prod_{p \leq m} \left(1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right)^2\right)$
 $\downarrow n \rightarrow +\infty$
 $\prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$
 Or $1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right)^2 \leq 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{m}$
 donc
 $\frac{6}{\pi^2} \leq \prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 + \frac{1}{m \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}\right)$
 $\leq \prod_{p \leq m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3m}\right)$ mais
 $\log \left(\prod_{p \leq m} \left(1 + \frac{1}{3m}\right) \right) \leq \sum_{p \leq m} \frac{1}{3m} = \frac{1}{3} \frac{\pi(m)}{m}$
 $\downarrow m \rightarrow +\infty$
 donc $\prod_{p \leq m} \left(1 + \frac{1}{3m}\right) \rightarrow 1$
 On conclut par encadrement. \square