Prop Soit $s \in]1,+\infty[$. Alors

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

1 - Convergence du produit

Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers.

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}}_{\geq 1} . \text{ Alors}$$

P_n CV $\iff \ln(P_n)$ CV

$$\iff \underbrace{\sum_{i=0}^{n} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)}_{\geq 0} \text{ CV}$$

et $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \underset{i \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_i^s}$.

Or $p_n \geq n$ donc $\sum_{i \geq 0}^{+\infty} \frac{1}{p_i^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ CV (Riemann)

donc (P_n) CV.

2 - Déf de la loi zêta

On note donc $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, on pose

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$$

normalisé donc loi de proba.

En particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbb{P}(k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(kn)^s} = \frac{1}{k^s}}$$

3 - Indépendance des $p\mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}$

Soient $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ 2 à 2 distincts.

Rappel $p_1 | a$ et ... et $p_n | a \iff p_1 \cdots p_n | a$ (Euclide)

Alors

$$\mathbb{P}(p_1\mathbb{N}^* \cap \dots \cap p_n\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(p_1 \cdots p_n \mathbb{N}^*) = \frac{1}{(p_1 \cdots p_n)^s}$$

$$= \frac{1}{p_1^s} \cdots \frac{1}{p_n^s}$$

$$= \mathbb{P}(p_1\mathbb{N}^*) \cdots \mathbb{P}(p_n\mathbb{N}^*).$$

Donc les $p\mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendants.

4 - Application du TCM

En particulier les $(\overline{p_k\mathbb{N}^*})$ sont M.I.

Posons $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)$

$$= \mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (p_k\mathbb{N}^*)$$

d'où $A_n \searrow$

d'où $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. Par TCM :

$$\mathbb{P}(\lim A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$\overset{\text{M.I.}}{=} \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)}_{= 1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

$$= \prod_{k=1}^{+\infty} 1 - \frac{1}{p_k^s}.$$

Or $\lim A_n = \{$entiers divisibles par aucun nombre premier$\}$

$$= \{1\}$$

et $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$

d'où par continuité de l'inverse :

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

Application Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ indé.

Alors $\pi_n := \mathbb{P}(a \wedge b = 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{6}{\pi^2}$.

Notons $B_p = \{p \nmid a \wedge b\}$.

Alors $C_n = \bigcap_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} B_p = \{a \wedge b = 1\}$

et $\mathbb{P}(C_n) = \pi_n$.

Or les B_p sont M.I. d'où

$$\pi_n = \prod_{p \leq n} \underbrace{\mathbb{P}(p \nmid a \wedge b)}$$

$$= 1 - \mathbb{P}(p \mid a \wedge b)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(p \mid a)\mathbb{P}(p \mid b).$$

Or $\mathbb{P}(p \mid a) = \frac{\#\{kp \leq n\}}{n} = \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Or $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{1}{p}$

d'où

$$\prod_{p \leq n} 1 - \frac{1}{p^2} \leq \pi_n \leq \underbrace{\prod_{p \leq n}\left(1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2\right)}_{= Q_n}$$

$\downarrow_{n \to +\infty}$

$1/\zeta(2) = \frac{6}{\pi^2}$

Or $1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2 \leq 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n}$

d'où

$$Q_n = \prod_{p \leq n}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}\right)$$

$$\leq \prod_{p \leq n}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{4}{3n}\right) \text{ mais}$$

$$\log\left(\prod_{p \leq n} 1 + \frac{4}{3n}\right) \leq \sum_{p \leq n} \frac{4}{3n} = \frac{4}{3}\frac{\pi(n)}{n}$$

$\downarrow_{n \to +\infty}$ 0

d'où $\prod_{p \leq n} 1 + \frac{4}{3n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

On conclut par encadrement. $\square$

Prop Soit $s \in]1, +\infty[$. Alors

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}}$$

1. Convergence du produit

Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers.

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}}_{\geq 1}. \text{ Alors}$$

P_n CV $\iff \ln(P_n)$ CV

$$\iff \sum_{i=0}^{n} \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)}_{\geq 0} \text{ CV}$$

et $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \underset{i \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_i^s}$.

Or $p_n \geq n$ donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_i^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ CV (Riemann)

donc (P_n) CV.

2. Déf de la loi zêta

On note donc $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, on pose :

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$$

normalisé donc loi de proba.

En particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbb{P}(k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(kn)^s} = \frac{1}{k^s}}$$

3. Indépendance des $p\mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}$.

Soient $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ 2 à 2 distincts.

Rappel $p_1 | m$ et ... et $p_n | m \iff p_1 \cdots p_n | m$ (Euclide)

Alors

$$\mathbb{P}(p_1\mathbb{N}^* \cap \dots \cap p_n\mathbb{N}^*)$$

$$= \mathbb{P}(p_1 \cdots p_n \mathbb{N}^*) = \frac{1}{(p_1 \cdots p_n)^s}$$

$$= \frac{1}{p_1^s} \cdots \frac{1}{p_n^s}$$

$$= \mathbb{P}(p_1\mathbb{N}^*) \cdots \mathbb{P}(p_n\mathbb{N}^*).$$

Donc les $p\mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendants.

4. Application du TLM

En particulier les $(p_k\mathbb{N}^*)$ sont M.I

Posons $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)$

$$= \mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (p_k\mathbb{N}^*)$$

d'où $A_n \searrow$

d'où l...

$\mathbb{P}$(lim...

M.I...

Or

et

d'où ...

$(p_n\mathbb{N}^*)$

$\mathbb{N}^*) = \frac{1}{(p_1 \cdots p_n)^s}$

$= \frac{1}{p_1^s} \cdots \frac{1}{p_n^s}$

$\cdots P(p_n\mathbb{N}^*)$.

* sont mutuellement

des TCM

$\overline{}$

es $(p_k\mathbb{N}^*)$ sont M.I

$\bigcap^{n} (\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)$

$\mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (p_k\mathbb{N}^*)$

d'où $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. Par TCM :

$$P(\lim A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

M.I. $\quad = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P(\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)$

$$= 1 - \frac{1}{p_k^s}$$

$$= \prod_{k=1}^{+\infty} 1 - \frac{1}{p_k^s}$$

Or $\lim A_n = \{$ entiers divisibles par aucun nombre premier $\}$

$= \{1\}$

et $P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$

d'où par continuité de l'inverse :

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

Application Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ indé.

Alors $\pi_n := P(a \wedge b = 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{6}{\pi^2}$.

Notons $B_p = \{p \nmid a \wedge b\}$.

Alors $C_n = \bigcap_{p\in\mathcal{P},\, p\le n} B_p = \{a\wedge b = 1\}$

et $P(C_n) = 1$.

Or les B_p sont M.I. d'où

$$\pi_n = \prod_{p\le n} \underbrace{P(p \nmid a\wedge b)}.$$

$$= 1 - P(p \mid a\wedge b)$$

$$= 1 - P(p|a)P(p|b).$$

Or $P(p|a) = \frac{\#\{kp \le n\}}{n} = \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Or $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor \le \frac{1}{p}$

d'où $\prod_{p\le n} 1 - \frac{1}{p^2} \le \pi_n \le \underbrace{\prod_{p\le n}\left(1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2\right)}_{= Q_n}$

$\downarrow n\to+\infty$

$1/\zeta(2) = \frac{6}{\pi^2}$

Or $1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2 \le 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n}$

d'où

$$Q_n = \prod_{p\le n}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}\right)$$

$$\le \prod_{p\le n}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{4}{3n}\right) \text{ mais}$$

$$\log\left(\prod_{p\le n} 1 + \frac{4}{3n}\right) \le \sum_{p\le n} \frac{4}{3n} = \frac{4}{3}\frac{\pi(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $\prod_{p\le n} 1 + \frac{4}{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On conclut par encadrement. $\square$