Prop $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ | connexe, résoluble.
Alors G est co-TZ.

Rappel Si G est abélien, OK.

On a donc
$\{I_n\} = D^k G \trianglelefteq D^{k-1} G \leq \dots \trianglelefteq DG \trianglelefteq G$,
avec $k \geq 2$. Posons $H = D^{k-1}G$.
H est abélien car $DH = \{I_n\}$. Soit x vecteur propre commun.

Objectif Trouver $V \leq \mathbb{C}^n$ G-stable non trivial pour appliquer une récurrence forte.

Posons $V = \mathrm{Vect}(G \cdot x) = \mathrm{Vect}(g \cdot x, g \in G)$

Alors • $G \neq \{0\}$, car $G \ni x$,
• $G \neq \mathbb{C}^n$???

On a $H \trianglelefteq G$.
Soit $h \in H$, $hx = \lambda_h x$.
Si $g \in G$, $g^{-1}hg = u \in H$
donc $ux = \lambda_u x$
i.e. $h(gx) = \lambda_u (gx)$ et gx est commun à H.
Soit y vecteur propre commun à H.
Posons $\Lambda_y : H \longrightarrow \mathbb{C}$
$h \longmapsto$ valeur propre pour h associée à y

Λ_y est C^0, car linéaire sur $\mathrm{Vect}\, H$.

Posons enfin pour $h \in H$ fixé
$f : G \to \mathbb{C}$
$g \mapsto \Lambda_{gx}(h) = \Lambda_x(g^{-1}hg)$.

On a que f est C^0.
En effet, si $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert,
$$f^{-1}(U) = \{g \in G \mid \underbrace{g^{-1}hg}_{C^0 \text{ en } g} \in \underbrace{\Lambda_x^{-1}(U)}_{\text{ouvert}}\}$$
ouvert de G.

D'autre part, G est connexe donc
$f(G)$ est connexe inclus dans $\mathrm{Sp}(h)$, fini,
d'où $f(G) = \{\lambda_0(h)\}$.

Ainsi: $V \subseteq E_{\lambda_0(h)}(h)$ $\forall h \in H$.

En effet, si $v = g_1x + \dots + g_nx$,
$hv = hg_1x + \dots + hg_nx$
$= \lambda_0 g_1x + \dots + \lambda_0 g_nx$
$hv = \lambda_0 v$.

Supposons un instant que $V = \mathbb{C}^n$.
Alors pour tout $h \in H$, $E_{\lambda_0}(h) = \mathbb{C}^n$
donc h est une homothétie.

De plus, $H \subseteq SL_n(\mathbb{C})$, car $H = D^{k-1}G$.
Donc h est de rapport $\in \mathbb{U}_n$.

Or $h \mapsto$ rapport de h est continue,
$= \pi_1\left(h\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$

et H est connexe car $H = D^{k-1}G$ connexe.

Donc les rapports de H forment un singleton, qui contient 1 car $H \ni I_n$.
D'où $H = \{I_n\}$, absurde.

On a donc dans une base adaptée à $V \oplus W = \mathbb{C}^n$
$$g = \begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$
Pour $g \in G$,
avec $\begin{cases} \varphi_1 : g \longmapsto g_1 \\ \varphi_2 : g \longmapsto g_2 \end{cases}$
• morphismes de groupes,
• continus.

$\varphi_1(G), \varphi_2(G)$ sont donc • résolubles
• connexes.

Par hypothèse de récurrence, ils sont co-TZ.
Donc G est co-TZ également. □

Si G est connexe, DG est connexe.

Preuve notons C l'ensemble des commutateurs.

Alors $G \times G \longrightarrow C$
$(a,b) \longmapsto aba^{-1}b^{-1}$
est C^0, donc C est connexe.

Notons C_t le produit de t commutateurs.
$$C_t = \mathrm{im}\begin{pmatrix} \underbrace{C \times \dots \times C}_{\text{connexe}} \longrightarrow G \\ (g_1, \dots, g_t) \longmapsto g_1 \cdots g_t \end{pmatrix}$$
donc C_t est connexe
$C_t \ni e$,
d'où $\langle C \rangle = \bigcup_{t \in \mathbb{N}^*} C_t$ est connexe.

Prop $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ | connexe résoluble.

Alors G est co-TZ.

Rappel Si G est abélien, OK.

On a aussi

$\{I_n\} = D^k G \trianglelefteq D^{k-1} G \trianglelefteq \dots \trianglelefteq DG \trianglelefteq G$,

avec $k \geq 2$. Posons $H = D^{k-1} G$.

H est abélien car $DH = \{I_n\}$. Soit x vecteur propre commun à H.

Objectif Trouver $V \leq \mathbb{C}^n$ G-stable non trivial pour appliquer une récurrence forte.

Posons $V = \mathrm{Vect}(G \cdot x) = \mathrm{Vect}(g \cdot x, g \in G)$

Alors $*$ $G \neq \{0\}$, car $G \ni id$,

$*$ $G \neq \mathbb{C}^n$???

On a $H \trianglelefteq G$.

Soit $h \in H$. $hx = \lambda_h x$.

Si $g \in G$, $g^{-1} h g = u \in H$

d'où $ux = \lambda_u x$

i.e. $h(gx) = \lambda_u (gx)$ et gx est commun à H.

Soit y vec propre commun à H.

Posons $\Lambda_y : H \longrightarrow \mathbb{C}$

$h \longmapsto$ valeur propre pour h associée à x

Λ_y est C^0, car linéaire sur $\mathrm{Vect}\, H$

Posons enfin $f : G \to \mathbb{C}$ pour $h \in H$ fixé

$g \mapsto \Lambda_{gx}(h)$

$= \Lambda_x(g^{-1} h g)$.

On a que f est C^0.

En effet : si $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert,

$f^{-1}(U) = \{g \in G \mid \underbrace{g^{-1} h g}_{C^0 \text{ en } g} \in \underbrace{\Lambda_x^{-1}(U)}_{\text{ouvert}}\}$

ouvert de G.

D'autre part, G est connexe donc $f(G)$ est connexe inclus dans $Sp(h)$, fini,

d'où $f(G) = \{\lambda_x(h)\}$.

Ainsi : $V \subseteq E_{\lambda_x(h)}(h)$ $\forall h \in H$.

En effet, si $v = g_1 x + \dots + g_r x$,

$hv = h g_1 x + \dots + h g_r x$

$= \lambda_x g_1 x + \dots + \lambda_x g_r x$

$hv = \lambda_x v$.

Supposons un instant ...

Alors pour tout $h \in H$, ...

donc h est une hom...

De plus, $H \leq SL_n(\mathbb{C}$ ...

Donc h est de rapport ...

Or $h \mapsto$ rapport de ...

$= \pi_n(h($ ...

et H est connexe ...

Donc les rapports de H ...

singleton, fini contenant 1 ...

D'où $H = \{I_n\}$, contradiction ...

Supposons un instant que $V = \mathbb{C}^n$.

Alors pour tout $h \in H$, $E_{\lambda_0}(h) = \mathbb{C}^n$

donc h est une homothétie.

De plus, $H \leq SL_n(\mathbb{C})$, car $H = D^{k-1}G$.

Donc h est de rapport $\in \mathbb{U}_n$.

Or $h \mapsto$ rapport de h est continue,

$= \pi_1\left(h\begin{pmatrix}1\\ \vdots\end{pmatrix}\right)$

et H est connexe car $H = D^{k-1}G$ un connexe.

Donc les rapports de H forment un singleton, fini contenant 1 car $H \ni I_n$.

D'où $H = \{I_n\}$, établie.

On a donc dans une base adaptée

à $V \oplus W = \mathbb{C}^n$.

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

pour $g \in G$,

avec $\begin{cases} \varphi_1 : g \longmapsto g_1 \\ \varphi_2 : g \longmapsto g_2 \end{cases}$

morphismes de groupes,

continus.

$\varphi_1(G)$, $\varphi_2(G)$ sont donc résolubles

et connexes.

Par hypothèse de récurrence, ils sont co-TZ

Donc G est co-TZ également.

$\square$

Si G est connexe, DG est connexe.

Preuve : notons C l'ensemble des commutateurs.

Alors $\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow C \\ (a, b) &\longmapsto aba^{-1}b^{-1} \end{aligned}$

est C^0, donc C est connexe.

Notons C_t le produit de t commutateurs.

$$C_t = \operatorname{Im}\left(\begin{aligned} \underbrace{C \times \cdots \times C}_{\text{connexe}} &\longrightarrow G \\ (g_1, \dots, g_t) &\longmapsto g_1 \cdots g_t \end{aligned}\right)$$

donc C_t est connexe

$C_t \ni e$,

d'où $\langle C \rangle = \bigcup_{t \in \mathbb{N}^*} C_t$ est connexe.