220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires

Contexte : Dans cette leçon, I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$, U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^d$, $d \in \mathbf{N}^*$, et $f : I \times U \to \mathbf{R}^d$ est une fonction (au moins) continue.
On considérera des équations différentielles ordinaires (EDO) de la forme

$$(E) \qquad y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I,$$

où la fonction f est appelée *champ de vecteurs associé à* (E).

1. Théorie des équations différentielles ordinaires

1.1. Définitions et premiers exemples

Définition 1. Une **solution** de (E) est une fonction $y : J \to \mathbf{R}^d$ définie sur un intervalle $J \subset I$, dérivable et telle que :

- $\star$ pour tout $t \in J$, $y(t) \in U$.
- $\star$ pour tout $t \in J$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Définition 2. Une solution de (E) définie sur I tout entier est dite **globale.** On dit qu'une solution y de (E) définie sur $J \subset I$ est **maximale** s'il n'existe pas de solution $\tilde{y} : \tilde{J} \to \mathbf{R}^d$ de (E) telle que $J \subset \tilde{J}$ et $y(t) = \tilde{y}(t)$, $\forall t \in J$.

Remarque 3. Une solution globale est toujours maximale, mais une solution maximale peut ne pas être globale.

Exemple 4. Considérons l'équation $y'(t) = -(y(t))^2$, $t \in \mathbf{R}$.
La fonction $y : t \in]0, +\infty[\mapsto 1/t$ est une solution maximale mais non globale de cette EDO.

Remarque 5. Toute équation différentielle d'ordre $n \geq 2$ en dimension d peut se réécrire comme une équation d'ordre 1 en dimension $d \times n$.

1.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 6. Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$. On dit que $y : J \to \mathbf{R}^d$ est une **solution au problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si $J \subset I$ est un intervalle, $t_0 \in J$, y est dérivable sur J, $y(t_0) = y_0$ et pour tout $t \in J$, $y(t) \in U$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.

Exemple 7. Le problème de Cauchy $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, y(0) = 0, t \in \mathbf{R}$ admet au moins deux solutions différentes : la continuité du champ de vecteurs ne suffit pas à garantir l'unicité d'une solution maximale.

Théorème 8 : Cauchy-Lipschitz. Soit $f : I \times U \to \mathbf{R}^d$ telle que :

- $\star$ f est continue sur $I \times U$.
- $\star$ f est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, *ie* pour tout $(t, x) \in I \times U$, il existe $J \subset I$ un intervalle ouvert, $V \subset U$ ouvert et $L > 0$ tels que

$$\forall s \in J, \forall y, z \in V, \quad \|f(s, y) - f(s, z)\| \leq L\|y - z\|.$$

Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $J \subset I$.

Remarque 9. Si le champ de vecteurs est de classe $\mathcal{C}^1$ ou si l'on considère une équation différentielle linéaire à coefficients continus, alors les deux hypothèses du théorème sont satisfaites.

Théorème 10 : explosion en temps fini.
Soient $I =]a, b[$ et $f : I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Considérons y une solution maximale de (E) définie sur $J =]\alpha, \beta[$. Alors :

- $\star$ Si $\beta < b$, alors $\|y(t)\| \xrightarrow[t \to \beta^-]{} +\infty$.
- $\star$ Si $\alpha > a$, alors $\|y(t)\| \xrightarrow[t \to \alpha^+]{} +\infty$.

2. Exemples d'EDO avec résolution explicite

2.1. EDO linéaires scalaires d'ordre 1

Définition 11. Une **EDO linéaire (EDL) scalaire d'ordre 1** est de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I,$$

où I est un intervalle et $a, b : I \to \mathbf{R}$ sont des fonctions continues. **L'équation homogène associée** est :

$$y'(t) = a(t)y(t), \quad t \in I.$$

Méthode 12. Pour résoudre une EDL scalaire d'ordre 1, il faut :

- ⋆ la mettre sous forme résolue $y' = ay + b$.
- ⋆ résoudre l'équation homogène associée $y' = ay$ dont les solutions sont de la forme $y_H(t) = Ke^{A(t)}$, avec $K \in \mathbf{R}$ et A une primitive de a.
- ⋆ trouver une solution particulière à (E), ce qui se fait de façon triviale ou à l'aide de la méthode de variation de la constante : $y_P(t) = K(t)e^{A(t)}$. Les solutions de (E) sont alors de la forme $y_H + y_P$.
- ⋆ si l'on dispose d'une condition initiale, on l'applique pour trouver K.

Exemple 13. La solution de $y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2} = -\dfrac{1}{t^3}$ pour $t \in]0, +\infty[$ avec $y(1) = 1$ est $y(t) = \dfrac{3}{e}e^{1/t} - \dfrac{1}{t} - 1$, pour $t \in]0, +\infty[$.

2.2. Équations de Bernoulli

Définition 14. Une **équation de Bernoulli** est de la forme

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y(t)^m \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad t \in I$$

où I est un intervalle de $\mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, $a, b : I \to \mathbf{R}$ continues et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}$.

Méthode 15. Effectuer le changement de fonction inconnue $z = y^{1-m}$ permet de se ramener à une EDL.

Exemple 16. La solution de $y'(t) - ty(t)^3 + ty(t) = 0$ avec $y(0) = y_0$ est :

- ⋆ la fonction nulle si $y_0 = 0$.
- ⋆ $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Ke^{t^2}}}$ avec $K := -1 + 1/y_0^2$, si $y_0 > 0$.
- ⋆ $y(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 + Ke^{t^2}}}$ avec $K := -1 + 1/y_0^2$, si $y_0 < 0$

L'intervalle de définition de ces solutions maximales est $\mathbf{R}$ si $y_0 \in [-1, 1]$ et $\left]-\sqrt{\ln(-1/K)}, \sqrt{\ln(-1/K)}\right[$ sinon.

2.3. Équations différentielles à variables séparables du premier ordre.

Définition 17. Une **équation différentielle à variables séparables** du premier ordre est de la forme $y' = f(t, y)$ avec $f(t, y) = g(y)h(t)$, où $t, y \in \mathbf{R}$ et g, h sont des fonctions continues.

Méthode 18. Pour résoudre une équation à variables séparables, il faut :

- ⋆ trouver les points y^* tels que $g(y^*) = 0$ (points stationnaires).
- ⋆ sur chaque intervalle évitant ces points, on trouve une primitive $\mathcal{G}$ de $1/g$ et une primitive H de h. On a alors $\mathcal{G}(y(t)) = H(t) + C$, $C \in \mathbf{R}$.
- ⋆ $1/g$ est de signe constant et ne s'annule pas. Ainsi, $\mathcal{G}$ est strictement monotone donc admet une fonction réciproque.
- ⋆ On a alors $y(t) = \mathcal{G}^{-1}(H(t) + C)$, avec $C \in \mathbf{R}$.

Exemple 19. La solution maximale de $y' = y^2/t$ avec $y(1) = 1$ est définie sur $]0, e[$ et vaut $y(t) = \dfrac{1}{1 - \ln(t)}$.

3. Étude qualitative d'EDO autonomes

3.1. Étude qualitative et résolution explicite de l'équation logistique.

$n(t)$ désigne un nombre d'individus considéré au temps t.
Le modèle logistique s'écrit $(L) : n'(t) = rn(t)(1-n(t)/K)$, où r, K sont des constantes positives qui représentent respectivement la croissance intrinsèque de cette population et la capacité biotique.

Proposition 20. [DEV 1] Soient $n_0 \geq 0$ et $r, K > 0$. Alors il existe une unique solution maximale n de (L) vérifiant $n(0) = n_0$. En outre, elle est définie sur $[0, +\infty[$ et :

i) Si $n_0 > 0$, alors $n(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

ii) Si $n_0 < K$, alors $n(t) < K$ pour tout $t \geq 0$.

iii) Si $n_0 > K$, alors $n(t) > K$ pour tout $t \geq 0$.

iv) Si $n_0 > 0$, alors $n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} K$.

v) Si $n_0 > 0$, alors pour tout $t \geq 0$,

$$n(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{n_0} - 1\right) e^{-rt}}.$$

3.2. Aspects qualitatifs du modèle épidémiologique SIR

On étudie la propagation d'une épidémie au sein d'une population de $N > 0$ individus, composée au temps t d'un nombre $S(t), I(t), R(t)$ d'individus respectivement sains, infectés et rétablis.
On modélise cette situation par les fonctions $S, I : \mathbf{R}_+ \to [0, N]$ dérivables et vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta \dfrac{IS}{N} \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta \dfrac{IS}{N} - \gamma I \end{cases}, \quad \beta, \gamma > 0.$$

On pose $R := N - S - I$.

Proposition 21. [DEV 2]

i) S, I et R sont bien définies sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs positives pour tout choix de conditions initiales $S(0), I(0) \in [0, N]$ vérifiant $S(0) + I(0) \leq N$.

ii) Lorsque $R(0) = 0$ et $S(0) > 0$, la taille totale de l'épidémie définie par $R_\infty := \lim\limits_{t\to+\infty} R(t)$ est caractérisée par

$$(N - R_\infty) \exp\left(\frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{R_\infty}{N}\right) = S(0).$$

3.3. Étude qualitative du pendule simple sans frottement.

On considère l'équation différentielle décrivant le mouvement du pendule simple : $(P) : y''(t) + \sin(y(t)) = 0$, $t \in \mathbf{R}$.
En posant $v := y'$, cette équation est équivalente au système

$$(S) : \begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\sin(y(t)) \end{cases}.$$

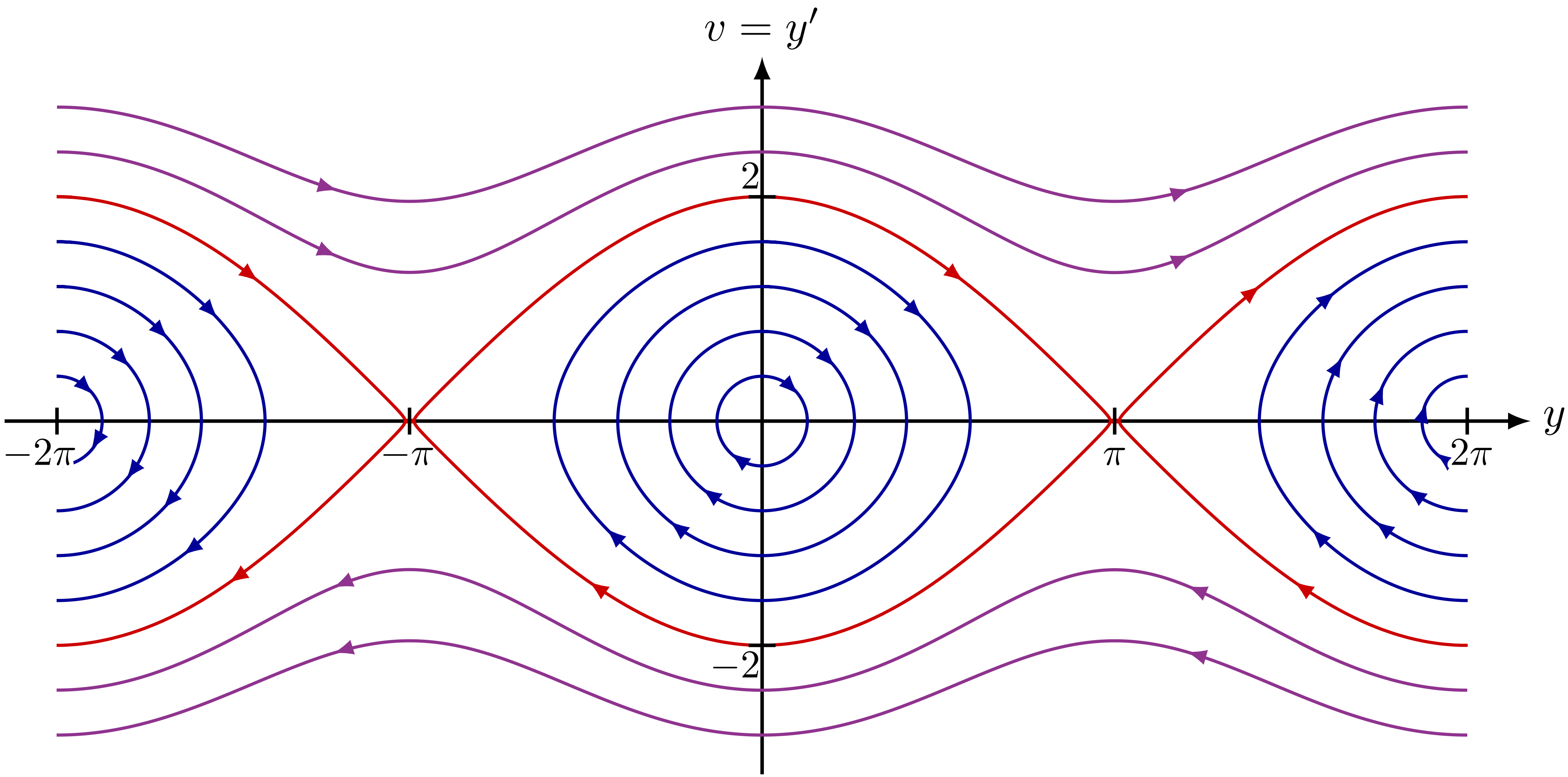
Proposition 22.

i) Pour tous $t_0 \in \mathbf{R}$ et $(y_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$, il existe une unique solution globale de (P) telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$.

ii) (P) donne $y'y'' + y' \sin y = 0$, soit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((y')^2/2 - \cos y) = 0$, ce qui assure que l'intégrale première de l'énergie $(y')^2/2 - \cos y$ est constante.
Ainsi, $(y'(t))^2 = v_0^2 + 2(\cos y(t) - 1)$ et donc :

- ⋆ si $|v_0| > 2$, y' reste de signe constant donc y est strictement monotone sur $\mathbf{R}$ et $y(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \pm\infty$.
- ⋆ si $|v_0| = 2$, $(y(t), v(t)) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} (\pm\pi, 0)$
- ⋆ si $|v_0| < 2$, y' s'annule et y est périodique.

On obtient alors le portrait de phase de (S), tel que représenté à la page suivante.



$v = y'$
y
2
-2
-2π
$-\pi$
π
2π