

245 : FONCTIONS HOLOMORPHES ET MÉROMORPHES SUR UN OUVERT DE \mathbf{C} . EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Contexte : Dans cette leçon, U désigne un ouvert de \mathbf{C} .

1. Premières définitions & propriétés

Définition 1. On dit que $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est **holomorphe** sur U si pour tout $a \in U$, $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ existe. Dans ce cas, cette limite est la dérivée de f au point a , notée $f'(a)$.

Exemple 2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $z \mapsto z^n$ est holomorphe sur \mathbf{C} .

Proposition 3. L'ensemble $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U , muni de l'addition et de la multiplication, forme une \mathbf{C} -algèbre. De plus, si $f \in \mathcal{H}(U)$ et $f(z) \neq 0, \forall z \in U$, alors $1/f \in \mathcal{H}(U)$.

Exemple 4. Les fonctions polynomiales sont holomorphes sur \mathbf{C} .

Théorème 5 : Conditions de Cauchy-Riemann. Soit $f = u + iv : U \rightarrow \mathbf{C}$. Supposons que f soit \mathbf{R} -différentiable en $z_0 \in U$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) f est holomorphe en z_0 .
- ii) $df(z_0)$ est \mathbf{C} -linéaire.
- iii) $df(z_0)$ est soit nulle, soit une similitude directe.
- iv) $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
- v) $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

Exemple 6. $z \mapsto \bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point.

Proposition 7. La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est holomorphe sur $D(0, R)$.

Définition 8. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est dite **analytique** si elle est développable en série entière en tout point de U .

Proposition 9. Une fonction analytique est holomorphe.

Exemple 10. \exp, \sin et \cos sont analytiques donc holomorphes sur \mathbf{C} .

2. Théorie de Cauchy

2.1. Vers l'analyticité

Définition 11. Un **chemin** est une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. On dit qu'il est **fermé** si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On note γ^* son image.

Définition 12. Soient γ un chemin et $f : \gamma^* \rightarrow \mathbf{C}$ continue. L'**intégrale curviligne** de f le long de γ est

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Proposition 13. Soient γ un chemin et $f : \gamma^* \subset U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Alors $\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Proposition 14. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ continue possède une primitive sur U ssi pour tout chemin fermé γ dans U , $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Exemple 15. $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur \mathbf{C}^* .

Théorème 16 : Cauchy. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert convexe, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin fermé et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Définition 17. Soient γ un chemin fermé et $a \in \mathbf{C} \setminus \gamma^*$. On appelle **indice** de a par rapport à γ la quantité $\text{Ind}(a, \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$.

C'est une quantité entière, constante sur chaque composante connexe de $\mathbf{C} \setminus \gamma^*$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus \gamma^*$.

Théorème 18 : Formule de Cauchy. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert convexe, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin fermé et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Alors :

$$\forall z \in \Omega \setminus \gamma^*, \quad f(z)\text{Ind}(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{u - z} du.$$

En outre, f est indéfiniment dérivable et pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\forall z \in \Omega \setminus \gamma^*, \quad f^{(n)}(z)\text{Ind}(z, \gamma) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}} du.$$

Théorème 19. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Alors elle est analytique.

2.2. Conséquences de l'analyticité

Théorème 20 : Prolongement analytique. Supposons U connexe. Considérons deux fonctions $f, g : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphes qui coïncident sur une partie $D \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U . Alors $f = g$.

Exemple 21. La seule fonction f holomorphe sur \mathbf{C} qui vérifie $f(1/n) = 1/n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ est l'identité.

Théorème 22 : Zéros isolés. Supposons U connexe. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et non identiquement nulle. Alors tout zéro de f possède un voisinage sur lequel f ne s'annule pas.

Exemple 23. Il n'existe pas de fonction $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe telle que $f(1/n) = 1/\ln n$ pour tout $n \geq 2$.

Proposition 24 : Inégalités de Cauchy. Soit $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Alors $\forall n \in \mathbf{N}, \forall r \in]0, R[$, $\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \sup_{z \in C(z_0, r)} \frac{|f(z)|}{r^n}$.

Théorème 25 : Liouville. Une fonction holomorphe et bornée sur \mathbf{C} est constante.

Application 26 : Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ non constant admet une racine complexe.

Théorème 27 : Holomorphie sous le signe intégral. Soient (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré et $f : U \times X \rightarrow \mathbf{C}$. Supposons que :

i) $\forall z \in U, x \mapsto f(z, x)$ est mesurable.

ii) $\forall x \in X$ pp, $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe.

iii) Pour tout $K \subset U$ compact, il existe $g \in \mathbf{L}^1(X)$ telle que pour tout $z \in K$ et pour presque tout $x \in X$, $|f(z, x)| \leq |g(x)|$.

Alors $F : z \in U \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$ est holomorphe sur U et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall z \in U, \quad F^{(n)}(z) = \int_X \frac{d^n f}{dz^n}(z, x) d\mu(x).$$

Application 28. [DEV 1a] Soient $m \in \mathbf{R}$ et $\sigma > 0$. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $\varphi_X : t \in \mathbf{R} \mapsto e^{imt} e^{-\sigma^2 t^2/2}$.

Théorème 29. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U convergant uniformément sur tout compact vers une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$. Alors f est holomorphe sur U .

Exemple 30. La fonction $\zeta : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z}$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(z) > 1\}$.

Théorème 31 : Principe du maximum. Supposons U connexe et borné. Soit $f : \bar{U} \rightarrow \mathbf{C}$ continue.

Supposons f holomorphe sur U . Alors $\forall z \in U, |f(z)| \leq \sup_{t \in \bar{U} \setminus U} |f(t)|$. De plus, s'il existe un point de U où se produit l'égalité, alors f est constante sur U .

Lemme 32 : Schwarz. [DEV 2] Notons $D := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et nulle en 0. Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D$.

Alors, pour tout $z \in D, |f(z)| \leq M|z|$. De plus, s'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = M|a|$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{U}$ tel que pour tout $z \in D, f(z) = \lambda Mz$.

Application 33. [DEV 2] Les biholomorphismes de D sont les $\varphi_{a, \lambda} : z \mapsto \lambda \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$, où $\lambda \in \mathbf{U}$ et $a \in D$.

3. Fonctions méromorphes

Théorème-Définition 34. Soit $a \in U$ et $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. On dit que f a une **singularité isolée** en a . Cette singularité vérifie un seul des 3 cas suivants :

- i) f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a : on dit que f a une **singularité illusoire** en a .
- ii) Il existe une unique suite finie (a_1, \dots, a_m) avec $a_m \neq 0$ telle que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{(z-a)^k}$ ait une singularité illusoire en a . On dit que a est un **pôle** d'ordre (ou de multiplicité) m .
- iii) Pour tout $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset U$, l'ensemble $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ est dense dans \mathbf{C} . On dit que f a une **singularité essentielle** en a .

Exemple 35. La fonction $z \mapsto \sin(z)/z$ admet une singularité illusoire en 0. La fonction $z \mapsto 1/(z^2 + 1)$ admet deux pôles simples en i et $-i$. La fonction $z \mapsto e^{1/z}$ admet une singularité essentielle en 0.

Définition 36. On dit que $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est **méromorphe** s'il existe une partie $A \subset U$ fermée et discrète telle que f soit holomorphe sur $U \setminus A$ et que tout point de A soit un pôle de f .

Proposition 37. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ méromorphe et a un pôle de f d'ordre m . Alors f admet un **développement en série de Laurent** au voisinage de a : il existe $R > 0$ tel que pour $z \in D(a, R) \setminus \{a\}$, $f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k(z-a)^k$, les coefficients d'indice négatif étant donnés par le théorème 34.

Exemple 38. La fonction $z \mapsto \frac{e^z}{z}$ est méromorphe sur \mathbf{C} et a un unique pôle simple en 0. Son développement en série de Laurent au voisinage de 0 est $\sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$.

Proposition 39. La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur

$\Omega_0 := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Elle se prolonge sur \mathbf{C} en une fonction méromorphe dont les pôles sont les entiers négatifs. De plus, pour $x > 0$, $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{x}{n}) e^{-x/n}$, où γ désigne la constante d'Euler.

Définition 40. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ méromorphe et a un pôle de f . Le **résidu** de f en a , noté $\operatorname{Res}(f, a)$ est le coefficient a_{-1} dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de a .

Proposition 41. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ méromorphe et a un pôle de f d'ordre m . Alors

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} [(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Théorème 42 : Résidus. Supposons U convexe. Considérons $a_1, \dots, a_n \in U$ deux à deux distincts et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ méromorphe dont les pôles sont les (a_k) . Soit γ un chemin fermé tel que $a_k \notin \gamma^*$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Ind}(a_k, \gamma) \operatorname{Res}(f, a_k).$$

Exemple 43. On a $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2 \cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.

Application 44. [DEV 1b] Soient $a \in \mathbf{R}$ et $b > 0$. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X suivant une loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ est $\varphi_X : t \in \mathbf{R} \mapsto e^{iat} e^{-b|t|}$.

Références :

- ★ *Analyse complexe pour la L3*, Tauvel
- ★ *Analyse complexe & applications*, Quéffelec
- ★ *Objectif agrégation*, Beck & al.
- ★ *De l'intégration aux probabilités*, Garet & Kurtzmann (Dev 1)
- ★ *Mathématiques pour l'agrégation externe - Analyse*, Rombaldi (Dev 2)