Th Si $f : B^n \longrightarrow B^n$ continue, alors $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

1) Régulariser

Par Stone-Weierstrass, B_n étant compacte,

$$P_m \xrightarrow[m\to+\infty]{CVU} f$$

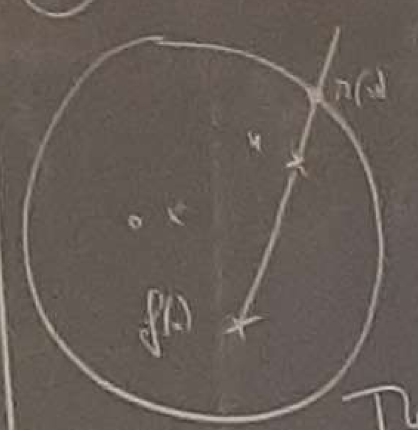
P_m polynomiales sur B_n.

Si $P_m(x_m) = x_m$ $\forall m$, en extrayant $x_{\varphi(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x^*$. Alors par CVU

$$\underbrace{f_m(x_{\varphi(m)})}_{= x_{\varphi(m)}} \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x^*) = x^*, \text{ donc } f \text{ a un point fixe.}$$

Ainsi $\boxed{\text{on peut supposer } f \text{ est } C^1}$.

2) Construction d'une rétraction



$r : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ t.q. $r_{|S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$

$x \longmapsto r(x)$

$$= \underbrace{]f(x), x)}_{f(x) \neq x} \cap S^{n-1}.$$

Montrons que f est C^1.

On a $r(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$.

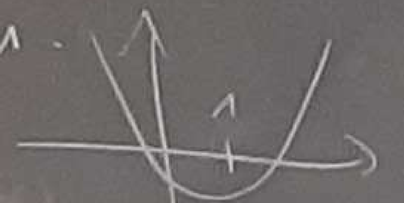
$r(x) \in S^{n-1}$ donc $\|r(x)\|^2 = 1$ d'où

$$\underbrace{\|x - f(x)\|^2}_{\neq 0} \lambda(x)^2 + 2\lambda(x)\langle f(x), x - f(x)\rangle + \|f(x)\|^2 - 1 = 0$$

$$= P(\lambda(x)) \quad \text{avec} \begin{cases} P(0) = \|f(x)\|^2 - 1 \leq 0 \\ P(1) = \|x\|^2 - 1 \leq 0, \end{cases}$$

d'où $\Delta > 0$

On pose $\lambda(x)$ la racine de $P \geq 1$.



Alors λ est C^1 et si $x \in S^{n-1}$, $\lambda(x) = 1$ d'où $r(x) = x$. OK,

3) Pas de rétraction C^1 !

Posons $H_t(x) = (1-t)x + t\,r(x)$

Alors H est C^1 et

$$d(H_t)_x = (1-t)\mathrm{id} + t\,dr_x$$

B^n étant compacte,

$$M = \sup_{x \in B^n} |||dr_x||| < +\infty$$

Idée (i) H_t est injective pour $t \ll 1$,

(ii) H_t y est inversible,

(iii) H_t y est surjective $B^n \to B^n$,

(iv) CDV et absurdité.

(i) $H_t(x) = H_t(y) \iff (1-t)(x-y) = t(r(y) - r(x))$

$x \neq y$, $t < 1$

$$\iff x - y = \frac{t}{1-t}(r(y) - r(x))$$

d'où par IAF sur B^n convexe :

$$\underbrace{\|x-y\|}_{\neq 0} \leq \frac{t}{1-t}\|r(y) - r(x)\| \leq \frac{Mt}{1-t}\|x-y\|$$

Ainsi pour $\frac{Mt}{1-t} < 1$, H_t est injective

i.e. $t < \frac{1}{1+M} = \alpha$.

(ii) $\boxed{t < \alpha}$ On a $d(H_t)_x = (1-t)\Big[\mathrm{id} + \underbrace{\frac{t}{1-t}dr_x}_{\text{inversible}}\Big]$

$|||\cdot||| < 1$ car $t < \alpha$

Comme H_t est injective, par TIG,

$$H_t : \mathring{B}^n \longrightarrow H_t(\mathring{B}^n) \subseteq \mathring{B}^n$$

C^1-difféo par convexité en vertu de H_t

(iii) Montrons que $H_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$.

Par TIG, $H_t(\mathring{B}^n)$ ouvert de $\mathring{B}^n$, non vide.

Or $\mathring{B}^n$ est connexe.

Montrons que c'est un fermé.

Supposons $\underbrace{y_n}_{= H_t(x_n)} \longrightarrow y \in \mathring{B}^n$,

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in B^n$ d'où

$y_n \longrightarrow H_t(x) = y$.

Enfin, si $x \in S^{n-1}$, $H_t(x) = x \in S^{n-1}$ $= y \in \mathring{B}^n$, exclu,

d'où $y = H_t(x)$, $x \in \mathring{B}^n$.

Ainsi $H_t : \mathring{B}^n \longrightarrow \mathring{B}^n$ C^1-difféo global.

(iv) Posons $P(t) = \int_{\mathring{B}^n} \det d(H_t)_x \, dx$ polynomiale.

Pour $t \in [0, \alpha[$, comme $\det(d(H_t)_x) > 0$ et ne s'annule pas pour $t < \alpha$,

par CDV

$$P(t) = \int_{\mathring{B}^n} dy = \mathrm{Vol}(\mathring{B}^n)$$

Donc $P(1) = \mathrm{Vol}(\mathring{B}^n)$.

Que vaut $P(1)$?

$H_1 = r$. Or $\|r(x)\|^2 = 1$ $\forall x$

d'où $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $\langle dr_x(h), h\rangle = 0$,

d'où $x \in \mathrm{Im}(dr_x)^\perp \neq \{0\}$.

$\neq 0$ car $\|x\| = 1$

Donc dr_x n'est pas inversible, d'où

$\det d(H_1)_x = 0$ et $P(1)$

$= \mathrm{Vol}(\mathring{B}^n) = 0$,

impossible ! $\square$

Th Si $f : B^n \longrightarrow B^n$ continue, alors $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.

---

① Régulariser

Par Stone-Weierstrass, B_n étant compacte,

$$P_m \xrightarrow[m\to+\infty]{CVU} f$$

P_m polynomiales sur B_n.

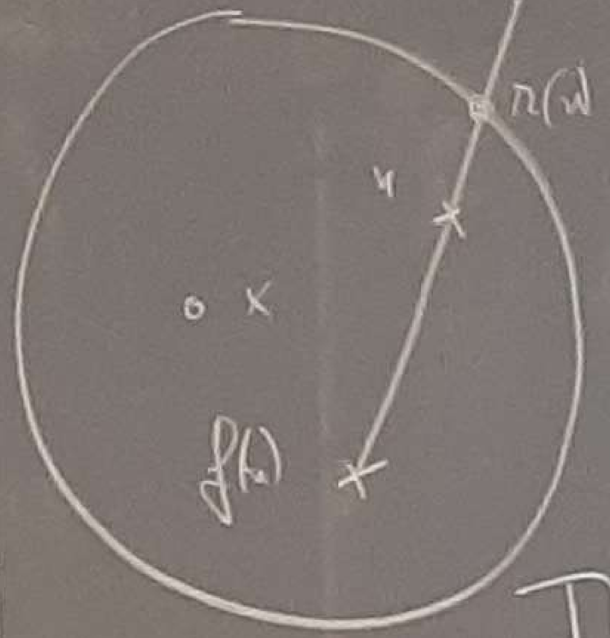
Si $P_m(x_m) = x_m$ $\forall m$, en extrayant $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^*$. Alors par CVU

$$f_m(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x^*)$$

$= x_{\varphi(n)}$ $= x$, donc f a un point fixe.

Ainsi $\boxed{\text{on peut supposer } f \text{ est } C^1}$.

② Construction d'une rétraction



$r : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ t.q. $r_{|S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$

$x \longmapsto r(x)$

$= \underbrace{]f(x), x)}_{f(x) \neq x} \cap S^{n-1}$.

Montrons que r est C^1.

On a $r(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$.

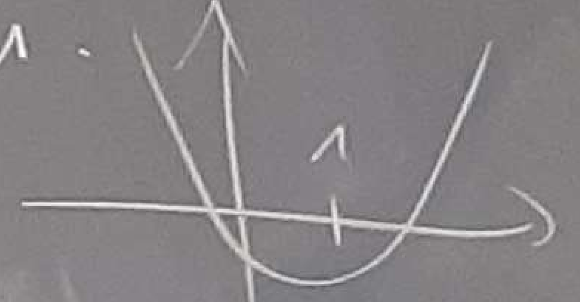
$r(x) \in S^{n-1}$ donc $\|r(x)\|^2 = 1$ d'où

$$\underbrace{\|x - f(x)\|^2}_{\neq 0} \lambda(x)^2 + 2\lambda(x)\langle f(x), x - f(x)\rangle + \|f(x)\|^2 - 1 = 0$$

$$= P(\lambda(x)) \quad \text{avec} \begin{cases} P(0) = \|f(x)\|^2 - 1 \leq 0 \\ P(1) = \|x\|^2 - 1 \leq 0, \end{cases}$$

d'où $\Delta > 0$

On pose $\lambda(x)$ la racine de $P \geq 1$.



Alors λ est C^1 et si $x \in S^{n-1}$, $\lambda(x) = 1$ d'où $r(x) = x$. OK,

③ Pas de rétraction C^1 !

Posons $H_t(x) = (1-t)x + t\,r(x)$

Alors H est C^1 et

$$d(H_t)_x = (1-t)\,id + t\,dr_x$$

B^n étant compacte,

$\exists\, \sup\limits_{x \in B^n} \|\|dr_x\|\| < +\infty$

Idée : (i) H_t est injective pour $t \ll 1$,

(ii) H_t y est inversible ;

(iii) H_t y est surjective $B^n \to B^n$,

(iv) CDV et absurdité.

(i) $H_t(x) = H_t(y)$

$x \neq y$

$t < 1$

d'où par

$\underbrace{\|x - y\|}_{\neq 0} \leq$

Ainsi pour $\frac{Mt}{1-t} <$

i.e. $t < \frac{1}{1+}$

$\boxed{t < \alpha}$

(ii) On a $d(H_t)_x = (1-$

Comme H_t est injective

$H_t : \overset{\circ}{B^n} \longrightarrow$

C^1-difféo

$x \in S^{n-1}$,

OK,

C^1 !

$+ A r(x)$

$t)\, id + t\, dr_x$

ente,

$< +\infty$

ctive pour $t \ll 1$,

inversible ;

surjective $\mathring{B}^n \to B^n$,

t absurdité.

(i) $H_t(x) = H_t(y) \iff (1-t)(x-y) = t(r(y) - r(x))$

$x \neq y$, $t < 1$

$\iff x - y = \frac{t}{1-t}(r(y) - r(x))$

d'où par IAF sur $\mathring{B}^n$ convexe :

$\underbrace{\|x-y\|}_{\neq 0} \leq \frac{t}{1-t}\|r(y) - r(x)\| \leq \frac{Mt}{1-t}\|x-y\|$

Ainsi pour $\frac{Mt}{1-t} < 1$, H_t est injective

i.e. $t < \frac{1}{1+M} = \alpha$.

(ii) On a $d(H_t)_x = (1-t)\underbrace{\left[id + \underbrace{\frac{t}{1-t} dr_x}_{|||\cdot||| < 1 \text{ car } t<\alpha}\right]}_{\text{inversible}}$

$\boxed{t < \alpha}$

Comme H_t est injective, par TIG :

$H_t : \mathring{B}^n \longrightarrow H_t(\mathring{B}^n) \subseteq \mathring{B}^n$

C^1-difféo $\quad$ par convexité en vertu de H_t

(iii) Montrons que $H_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$.

Par TIG, $H_t(\mathring{B}^n)$ ouvert de $\mathring{B}^n$, non vide.

Or $\mathring{B}^n$ est connexe...

Montrons que c'est un fermé.

Supposons $y_n \longrightarrow y \in \mathring{B}^n$,

$= H_t(x_n)$

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in B^n$ d'où

$y_n \longrightarrow H_t(x) = y$.

Enfin, si $x \in S^{n-1}$, $H_t(x) = x \in S^{n-1}$

$= y \in \mathring{B}^n$, exclu,

d'où $y = H_t(x)$, $x \in \mathring{B}^n$.

Ainsi $H_t : \mathring{B}^n \longrightarrow \mathring{B}^n$

C^1-difféo global.

(iv) Posons $P(t) = \int_{\mathring{B}^n} \det d(H_t)_x \, dx$

polynomiale.

Pour $t \in [0, \alpha[$, comme $\det(d(H_t)_x) > 0$

et ne s'annule pas pour $t < \alpha$,

par CDV :

$P(t) = \int_{\mathring{B}^n} dy = Vol(\mathring{B}^n)$

D'où $P(1) = Vol(\mathring{B}^n)$.

Que vaut $P(1)$?

$H_1 = r$. Or $\|r(x)\|^2 = 1 \;\forall x$

d'où $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $\langle dr_x(h), h \rangle = 0$,

d'où $x \in \mathrm{Im}(dr_x)^{\perp} \neq \{0\}$.

$\neq 0$ car $\|x\| = 1$

Donc dr_x n'est pas inversible, d'où

$\det d(H_1)_x = 0$ et $P(1)$

$= Vol(\mathring{B}^n) = 0$,

impossible ! $\square$