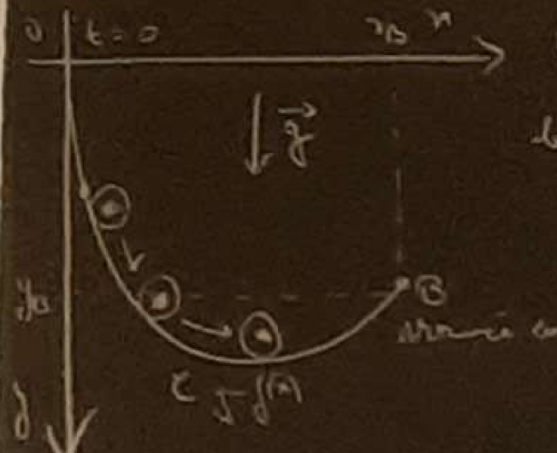


Ex. $y = \frac{y_B}{x_B}x$ la ligne droite.

$\left\{ f\in C^0([0,x_B])\cap C^1(]0,x_B[) \mid f(0)=0,\ f(x_B)=y_B,\ f_{|]0,x_B]}>0 \right\} = E$.

⚠ pas ouvert !

(CEM)

Minimiser T $\iff$ Minimiser

$\mathcal{T}: E \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

$f \mapsto \int_0^{x_B} \underbrace{\sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{f(x)}}}_{L[f](x)} dx$

où $L: \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(y,y')\mapsto L(y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$

Rq $\int_0^{x_B}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ cv donc $\mathcal{T}$(ligne droite) $<\infty$

① (ADMIS) $f = \operatorname{argmin}\mathcal{T} \Rightarrow f$ sol de $(\mathcal{EL})$

$(\mathcal{EL})$: $\forall x\in]0,x_B]$ $\frac{\partial L}{\partial y}(f,f') - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(f,f') = 0$.

Or $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{L}{2y}\\ \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'L}{1+y'^2}\end{cases}$ d'où :

$(\mathcal{EL})$: $2ff''+f'^2+1=0$

i.e. $(1+f'(x)^2)f(x) = C$ pour un $C>0$.

② Si L est st. convexe et $\frac{\partial L}{\partial y'}$ bornée, la réciproque est vraie.

Soit f_0 sol. de $(\mathcal{EL})$, $g\in E$, $\mathcal{T}(g)<\infty$, $f_0\neq g$.

$\mathcal{T}(g)-\mathcal{T}(f_0) = \int_0^{x_B}\left(L(g,g')-L(f_0,f_0')\right)dx$

$> \int_0^{x_B}\left\langle \vec\nabla L(f_0,f_0') \,\middle|\, \begin{pmatrix}g-f_0\\ g'-f_0'\end{pmatrix}\right\rangle dx$

$\mathcal{T}(g)-\mathcal{T}(f_0) > \int_0^{x_B}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial y}(f_0,f_0')(g-f_0)+\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0,f_0')(g'-f_0')\right]}dx$

$= \int_0^{x_B}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0,f_0')(g-f_0) + \frac{\partial L}{\partial y'}(f_0,f_0')(g-f_0)'\right)$

$= \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0,f_0')}_{<\infty}(g-f_0)(x)\right]_0^{x_B} = 0-0$

Donc $\mathcal{T}(g)>\mathcal{T}(f_0)$. □

③ Problème éq. à L convexe.

$f\in E$ $\quad g=\sqrt{2f}$, $f'=gg'$

$\mathcal{T}(f) = \int_0^{x_B}\sqrt{\frac{1+g^2g'^2}{\frac{g^2}{2}}} = \sqrt2\int_0^{x_B}\sqrt{\frac{1}{g^2}+g'^2} = \sqrt2\,\tilde{\mathcal{T}}(g)$

où $\tilde{\mathcal{T}}: f\mapsto\int_0^{x_B}\tilde L(g,g')\,dx$

où $\tilde L: (y,y')\mapsto\sqrt{\frac1{y^2}+y'^2}$

et $\boxed{f=\operatorname{argmin}\mathcal{T}\iff g=\operatorname{argmin}\tilde{\mathcal{T}}}$

Rq (i) $\tilde L$ st. convexe (ii) $\frac{\partial\tilde L}{\partial y'}$ bornée

(iii) Si f_0 vérifie $(\mathcal{EL})$ pour L, $g_0=\sqrt{2f_0}$ vérifie $(\mathcal{EL})$ pour $\tilde L$.

On calcule :

$\begin{cases}\frac{\partial\tilde L}{\partial y} = -\frac1{y^3}\frac1{\tilde L}\\ \frac{\partial\tilde L}{\partial y'} = y'\frac1{\tilde L} \text{ et } \frac{d}{dx}\frac{\partial\tilde L}{\partial y'}(g,g') = \frac{1}{g^3}\frac{1}{\tilde L^3}(gg')'.\end{cases}$

Ainsi :

(ii) $\frac{\partial\tilde L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2+\frac1{y^2}}}\le 1$

(i) $\tilde L$ est strictement convexe.

En effet.

$\mathrm{Hess}(\tilde L(y,y')) = \frac{1}{\tilde L^3}\begin{pmatrix}\frac{1}{y^4}\left(\frac{2}{y^2}+3y'^2\right) & y'/y^3\\ y'/y^3 & 1/y^2\end{pmatrix}$

$\in S_2^{++}(\mathbb{R})$,

Car $\begin{cases}\mathrm{Tr}(H(\tilde L))>0\\ \det(H(\tilde L)) = \frac{1}{\tilde L^6}\left[\frac{1}{y^6}\left(\frac{2}{y^2}+3y'^2\right) - \frac{y'^2}{y^6}\right] > 0\end{cases}$

(iii)

$\frac{\partial\tilde L}{\partial y}(g_0,g_0') - \frac{d}{dx}\frac{\partial\tilde L}{\partial y'}(g_0,g_0')$

$= -g_0^{-3}(g_0^{-2}+g_0'^2)^{-1/2}$

$\quad - g_0^{-3}(g_0^{-2}+g_0'^2)^{-3/2}(g_0g_0')'$

$= -g_0^{-3}(g_0^{-2}+g_0'^2)^{-1/2}\left[\underbrace{g_0^{-2}+g_0'^2+(g_0g_0')'}\right]$

$\left(g'=\frac{f'}{g}\right)$ $\quad = (2f_0)^{-1}+\frac{f'^2}{2f}+f''$

$= \frac{1}{2f_0}\big(\underbrace{2f_0f_0''+f_0'^2+1}_{=0}\big)$. □

D'où

$\boxed{f=\operatorname{argmin}\mathcal{T}\iff\exists C\ (1+f'^2)f=C}$

④ Étude qualitative

Soit f sol du problème.

(a) f n'est cste sur aucun intervalle,

(b) f a au plus 1 point critique, auquel cas un max.

(c) f est soit ↗ soit unimodale

(d) f' est st ↘ sur $]0,x_B]$

Preuve.

(a) Par $(\mathcal{EL})$ et forme de $\frac{\partial L}{\partial y'}(f,f')$.

(b) $f(x) = \frac{C}{1+f'(x)^2}\le C$

et $f(x)=C \iff f'(x)=0$.

Si $f'(x_0)=f'(x_1)=0$, et f non cste sur $[x_0,x_1]$ donc a un maximum en x_2, $f(x_2)<C$ mais $f'(x_2)=0$.

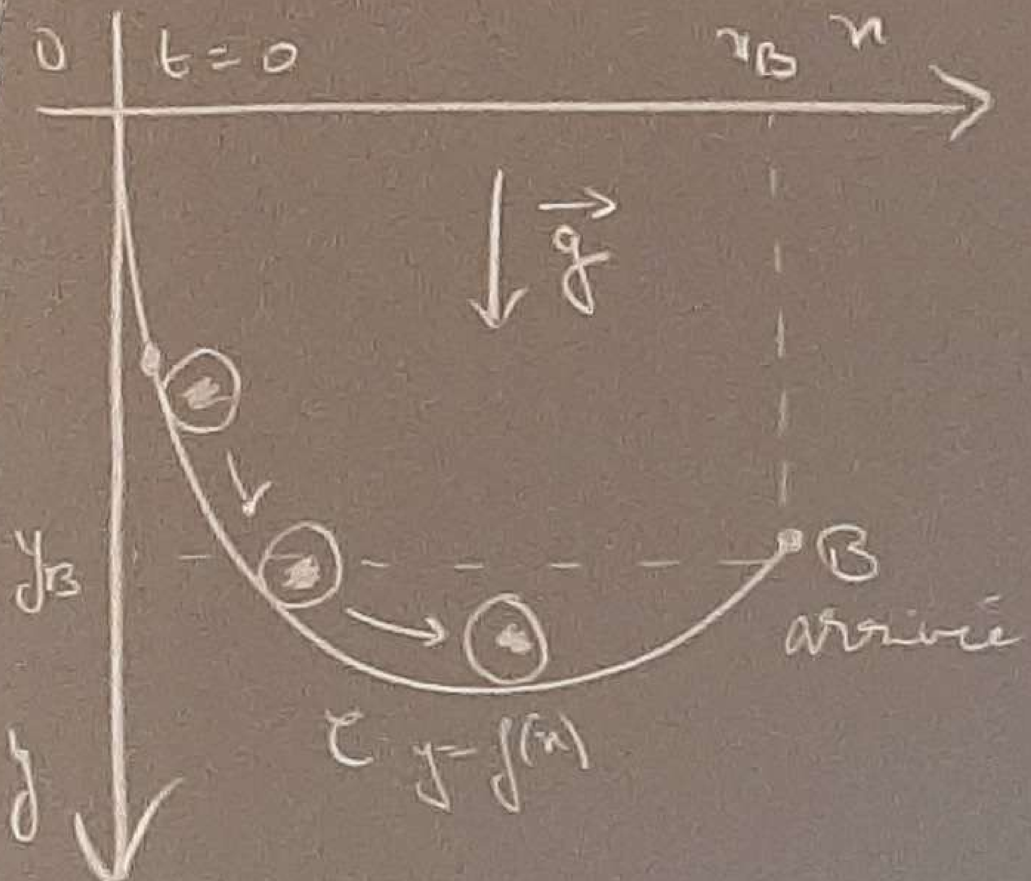
(c) f commence par croître car $f>0$ d'où

x	0		x_B
$f'(x)$	‖	$+$	
f		↗	

ou

x	0		x^*		x_B
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$f(x^*)=C$	↘	

(d) $f'' = -\frac12(1+f'^2)\frac1f<0$



Ex. $y = \frac{y_B}{x_B}x$ la ligne droite.

$\{f\in C^0([0,x_B])\cap C^2(]0,x_B[) \mid f(0)=0,\ f(x_B)=y_B,\ f|_{]0,x_B]}>0\} = E.$ ⚠ pas ouvert !

(CEM)

Minimiser T $\iff$ Minimiser

$\mathcal{J}: E\to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

$$f\mapsto \int_0^{x_B}\underbrace{\sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{f(x)}}}_{L[f](x)}dx$$

où $L: \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(y,y')\mapsto L(y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$

Rq $\int_0^{x_B}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ cv donc $\mathcal{J}$(ligne droite) $< \infty$

① (ADMIS) $f=\operatorname{argmin}\mathcal{J} \implies f$ sol. de (EL)

(EL) : $\forall x\in]0,x_B[\quad \frac{\partial L}{\partial y}(f,f') - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(f,f')=0$.

Or $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-L}{2y}$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'L}{1+y'^2}$ d'où :

(EL) : $2ff''+f'^2+1=0$

i.e. $(1+f'(x)^2)f(x)=C$ pour un $C>0$.

② Si L est st. convexe et $\frac{\partial L}{\partial y'}$ bornée, la réciproque est vraie.

Soit f_0 sol. de (EL), $g\in E$, $\mathcal{J}(g)<\infty$, $f_0\neq g$.

$$\mathcal{J}(g)-\mathcal{J}(f_0) = \int_0^{x_B}\left(L(g,g')-L(f_0,f_0')\right)dx$$

$$> \int_0^{x_B}\left\langle \vec{\nabla} L(f_0,f_0') \,\middle|\, \begin{pmatrix} g-f_0 \\ g'-f_0'\end{pmatrix}\right\rangle dx$$

$$\mathcal{J}(g)-\mathcal{J}(f_0) > \int_0^{x_B}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial y}(f_0,f_0')(g-f_0)+\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0,f_0')(g'-f_0')\right]}dx$$

$$=\int_0^{x_B}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0,f_0')(g-f_0)+\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0,f_0')(g-f_0)'\right)$$

$$=\left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial y'}}_{\le M}(f_0,f_0')(g-f_0)(x)\right]_0^{x_B} = 0-0$$

d'où $\mathcal{J}(g)>\mathcal{J}(f_0)$. □

③ Problème éq. à L convexe.

$f\in E \qquad g=\sqrt{2f}$, $f'=gg'$

$$\mathcal{J}(f)=\int_0^{x_B}\sqrt{\frac{1+g^2g'^2}{\frac{g^2}{2}}} = \sqrt{2}\int_0^{x_B}\sqrt{\frac{1}{g^2}+g'^2} = \sqrt{2}\,\tilde{\mathcal{J}}(g)$$

où $\tilde{\mathcal{J}}: f\mapsto\int_0^{x_B}\tilde{L}(g,g')dx$

où $\tilde{L}:(y,y')\mapsto\sqrt{\frac{1}{y^2}+y'^2}$

et $\boxed{f=\operatorname{argmin}\mathcal{J} \iff g=\operatorname{argmin}\tilde{\mathcal{J}}}$

Rq (i) $\tilde{L}$ st. conv...

(ii) Si f_0 vérif...

pour ...

$g_0=\sqrt{2\ldots}$

pour ...

On calcule :

$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial y} = -\frac{1}{y^3}\frac{1}{\tilde{L}}$

$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = y'\frac{1}{\tilde{L}}$ e...

Ainsi :

(ii) $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial y'} = \frac{\ldots}{\sqrt{y'^2\ldots}}$

(i) $\tilde{L}$ est st...

En effet

Rq (i) $\tilde{L}$ st. convexe (ii) $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'}$ bornée

(iii) Si f_0 vérifie $(E\mathcal{L})$ pour L, $g_0 = \sqrt{2 f_0}$ vérifie $(E\mathcal{L})$ pour $\tilde{L}$.

On calcule :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} = -\frac{1}{y^3}\frac{1}{\tilde{L}} \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = y'\frac{1}{\tilde{L}} \end{cases}$$

et $\frac{d}{dx}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'}(g, g') = \frac{1}{g^3}\frac{1}{\tilde{L}^3}(gg')'$.

Ainsi :

(ii) $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + \frac{1}{y^2}}} \leq 1$

(i) $\tilde{L}$ est strictement convexe.

En effet

$$\mathrm{Hess}(\tilde{L}(y, y')) = \frac{1}{\tilde{L}^3}\begin{pmatrix} \frac{1}{y^4}\left(\frac{2}{y^2} + 3y'^2\right) & y'/y^3 \\ y'/y^3 & 1/y^2 \end{pmatrix} \in S_2^{++}(\mathbb{R}),$$

car

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(H(\tilde{L})) > 0 \\ \det(H(\tilde{L})) = \frac{1}{\tilde{L}^6}\left[\frac{1}{y^6}\left(\frac{2}{y^2} + 3y'^2\right) - \frac{y'^2}{y^6}\right] > 0. \end{cases}$$

(iii)

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y}(g_0, g_0') - \frac{d}{dx}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'}(g_0, g_0')$$

$$= -g_0^{-3}(g_0^{-2} + g_0'^2)^{-1/2} - g_0^{-3}(g_0^{-2} + g_0'^2)^{-3/2}(g_0 g_0')'$$

$$= -g_0^{3}(g_0^{-2} + g_0'^2)^{-1/2}\left[\underbrace{g_0^{-2} + g_0'^2 + (g_0 g_0')'}\right]$$

$$\left(g' = \frac{f'}{g}\right) \qquad = (2f_0)^{-1} + \frac{f'^2}{2f} + f''$$

$$= \frac{1}{2f_0}\left(\underbrace{2f_0 f_0'' + f_0'^2 + 1}_{=0}\right). \ \square$$

D'où

$$\boxed{f = \mathrm{argmin}\, \mathcal{J} \iff \exists C \ (1 + f'^2) f = C}$$

4) Étude qualitative

Soit f sol. du problème.

(a) f n'est cte sur aucun intervalle,

(b) f a au plus 1 point critique, auquel cas un max.

(c) f est soit st. ↗ soit unimodale

(d) f' est st. ↘ sur $]0, x_B]$

Preuve.

(a) Par $(E\mathcal{L})$ et forme de $\frac{\partial L}{\partial y'}(f, f')$.

(b) $f(x) = \frac{C}{1 + f'(x)^2} \leq C$

et $f(x) = C \iff f'(x) = 0$.

Si $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$, et $x_0 < x_1$, f non cte sur $[x_0, x_1]$ donc a un minimum en x_2, $f(x_2) < C$ mais $f'(x_2) = 0$.

(c) f commence par croître car $f > 0$ d'où

x	0		x_B
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	
f		↗	

ou

x	0		x^*		x_B
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$f(x^*) = C$	↘	

(d) $f'' = -\frac{1}{2}(1 + f'^2)\frac{1}{f} < 0$.