Lemme (Hurwitz) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe, $f_n \xrightarrow{CVU} f$ avec f non constante. Si les f_n sont injectives, alors f est injective.
sur tout compact

$\boxed{\textbf{Th.} \text{ (Riemann) Soit } \emptyset \subsetneq \Omega \subsetneq \mathbb{C} \text{ simplement connexe (SC). Alors } \Omega \simeq \mathbb{D}.}$

Rappel Toute injection holomorphe est un biholomorphisme sur son image.

Projet (1) Se ramener à Ω borné.

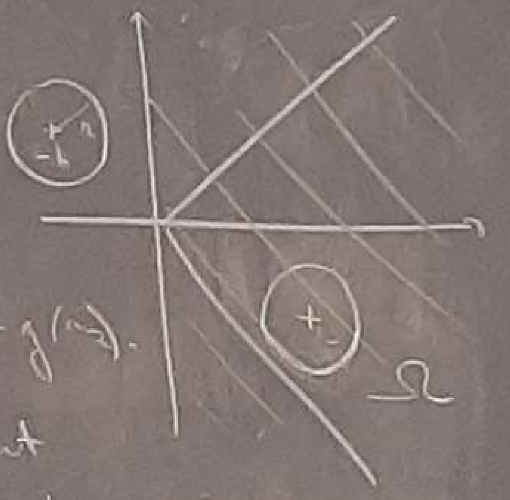
(2) Invoquer Montel pour avoir un candidat f^*

(3) Mq $f^*(\Omega) = \mathbb{D}$.

(1) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Soit $f: z \mapsto z - a$.
f est holomorphe sur Ω SC et ne s'annule pas. Soit g une racine carrée $\in \mathcal{H}(\Omega)$.

Alors :

* g est injective,
* g ne s'annule pas sur Ω,
* $\forall a_1, a_2 \in \Omega$, $g(a_1) \neq -g(a_2)$.



$g(\Omega)$ est un ouvert $\supseteq D(b, r)$. D'où

$D(b,r) \cap D(-b,r) = \emptyset$. Posons

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{g(z) + b}$$ bien définie et bornée.

Alors $\varphi(\Omega) \simeq \Omega$ est SC et borné.
Quitte à translater ou opérer des homothéties,
QPS : $\boxed{0 \in \Omega \subseteq \mathbb{D}}$.

(2) Rq D'après Schwarz, si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et $f(0) = 0$, si $g : \Omega \to \mathbb{D}$, $|f'(0)| \geq |g'(0)|$.

Posons $\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega),\ f(0) = 0,$
$f(\Omega) \subseteq \mathbb{D},$
f injective,
$|f'(0)| \geq 1 \}$

Si $\mathcal{A}$ est compacte, on pose

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$f \longmapsto |f'(0)|,$$

continue par Weierstrass.

Notons $f^* = \underset{f \in \mathcal{A}}{\mathrm{argmax}}(\phi)$.

Mq $\mathcal{A}$ est compacte.

* On a : $\forall K \subseteq \Omega$ compact $\forall f \in \mathcal{A}$ $|f| \leq 1$
donc par le théorème de Montel,
$\mathcal{A}$ est relativement compacte.
* RAM que $\mathcal{A}$ est fermée.
Soit $f_n \to f$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Alors
$\in \mathcal{A}$
  * $f(0) = 0$ (CVS)
  * $|f'(0)| \geq 1$ (Weierstrass et CVS)
  * $|f| \leq 1$ par CVS. Mq $|f| < 1$.

Si $|f(z_0)| = 1$, par principe du maximum, f est constante, exclu, car $f'(0) \geq 1$.

* f est injective (Hurwitz)

puisque f non constante.
Ce qui permet de conclure.

(3) $f^*(\Omega) = \Omega' \subseteq \mathbb{D}$.
Il suffit de mq $\Omega' \subseteq \mathbb{D}$.
Supposons le contraire ; soit $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \Omega'$.

On pose $$\varphi_{z_0} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$
$$z \longmapsto \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}$$

φ_{z_0} ne s'annule pas sur Ω' SC,
soit $\sqrt{\varphi_{z_0}}$ une RC, $y_0 = \sqrt{z_0}$.

Posons enfin $u : \varphi_{y_0} \circ \sqrt{\varphi_{z_0}}$.

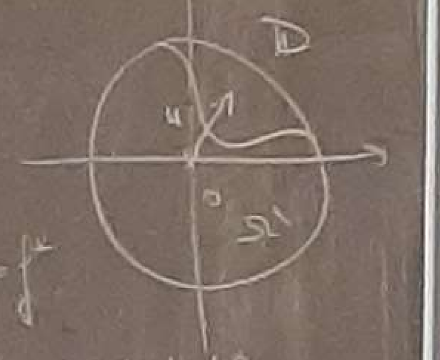
Alors u est $\in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ | injective
| à valeurs dans $\mathbb{D}$
| $u(0) = 0$.

De plus,

$$u'(0) = \varphi'_{y_0}(y_0) \frac{\varphi'_{z_0}(0)}{2\sqrt{\varphi_{z_0}(0)}} = \frac{1}{|y_0|^2 - 1} \frac{|z_0|^2 - 1}{2 y_0}$$

$$= \frac{|y_0|^2 + 1}{2 y_0}$$ d'où

$|u'(0)| > 1$.



Posons $f^{**} = u \circ f^*$

d'où $|f^{**\prime}(0)| = \underbrace{|u'(0)|}_{> 1} |f^{*\prime}(0)|$

et f^{**} | $\in \mathcal{H}(\Omega)$
| injective
| $f^{**}(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$
| $f^{**}(0) = 0$
| $|f^{**\prime}(0)| \geq 1$,

contradiction avec $f^* = \mathrm{argmax}\, \phi$.

$\square$

Lemme (Hurwitz) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe, $f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur tout compact avec f non constante & les f_n sont injectives, alors f est injective.

$\boxed{\text{Th. (Riemann) Soit } \emptyset \subsetneq \Omega \subsetneq \mathbb{C} \text{ simplement connexe (SC). Alors } \Omega \simeq \mathbb{D}.}$

Rappel Toute injection holomorphe est un biholomorphisme sur son image.

Projet ① Se ramener à Ω borné.

② Invoquer Montel pour avoir un candidat f^*

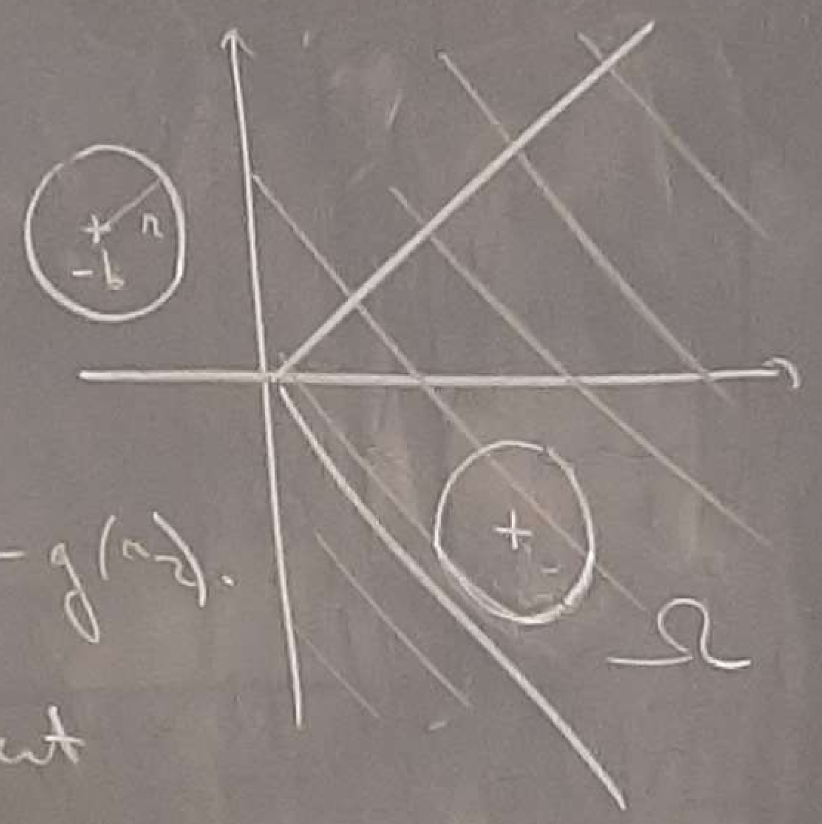
③ Mq $f^*(\Omega) = \mathbb{D}$.

① Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Soit $f : z \mapsto z - a$.

f est holomorphe sur Ω SC et ne s'annule pas. Soit g une racine carrée $\in \mathcal{H}(\Omega)$.

Alors

* g est injective,
* g ne s'annule pas sur Ω,
* $\forall a_1, a_2 \in \Omega$, $g(a_1) \neq -g(a_2)$.



$g(\Omega)$ est un ouvert $\supseteq D(b,r)$. D'où

$D(b,r) \cap D(-b,r) = \emptyset$. Posons

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{g(z)+b}, \text{ bien définie et bornée.}$$

Alors $\varphi(\Omega) \simeq \Omega$ est SC et borné.
Quitte à translater ou opérer des homothéties,
QPS : $\boxed{0 \in \Omega \subseteq \mathbb{D}}$.

② Rq D'après Schwarz, si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et $f(0) = 0$, si $g : \Omega \to \mathbb{D}$, $|f'(0)| \geq |g'(0)|$.

Posons $\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega),\ f(0) = 0,\ f(\Omega) \subseteq \mathbb{D},\ f \text{ injective},\ |f'(0)| \geq 1 \}$.

Si $\mathcal{A}$ est compacte, on pose

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$f \longmapsto |f'(0)|,$$

continue par Weierstrass.

Notons $f^* =$

Mq $\mathcal{A}$ est

* On a : $\forall$
compa

donc par
$\mathcal{A}$ est rel

* RAT

Soit f_n
$\in \mathcal{A}$

*

*

Si $|f$

f est co

*

Puisque f

Ce qui ferme

... est SC et borné.

... au groupe des homothéties,

$\boxed{\Omega \subseteq \mathbb{D}}$.

... Schwarz, on $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$

... $\Omega \to \mathbb{D}$, $|f'(0)| \geq |g'(0)|$.

... $\mathcal{H}(\Omega)$, $f(0) = 0$,

... $\Omega) \subseteq \mathbb{D}$,

...jective,

... $0)| \geq 1 \}$

...te, on pose

$\mathbb{R}_+$

$|f'(0)|$,

Weierstrass.

Notons $f^* = \underset{f \in \mathcal{A}}{\mathrm{argmax}} |\phi|$.

Mq $\mathcal{A}$ est compacte.

* On a : $\forall K \subseteq \Omega$ compact $\forall f \in \mathcal{A}$ $|f| \leq 1$

donc par le théorème de Montel, $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

* RAM que $\mathcal{A}$ est fermée.
Soit $f_n \to f$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Alors
$\in \mathcal{A}$

- * $f(0) = 0$ (CVS)
- * $|f'(0)| \geq 1$ (Weierstrass et CVS)
- * $|f| \leq 1$ par CVS. Mq $|f| < 1$.

Si $|f(z_0)| = 1$, par principe du maximum, f est constante, exclu, car $f'(0) \geq 1$.

- * f est injective (Hurwitz)

puisque f non constante

Ceci permet de conclure.

---

③ $f^*(\Omega) = \Omega' \subseteq \mathbb{D}$.

Il suffit de mq $\Omega' \subseteq \mathbb{D}$.

Supposons le contraire ; soit $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \Omega'$.

On pose $\varphi_{z_0} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$$z \mapsto \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}$$

φ_{z_0} ne s'annule pas sur Ω' SC, soit $\sqrt{\varphi_{z_0}}$ une RC, $y_0 = \sqrt{z_0}$.

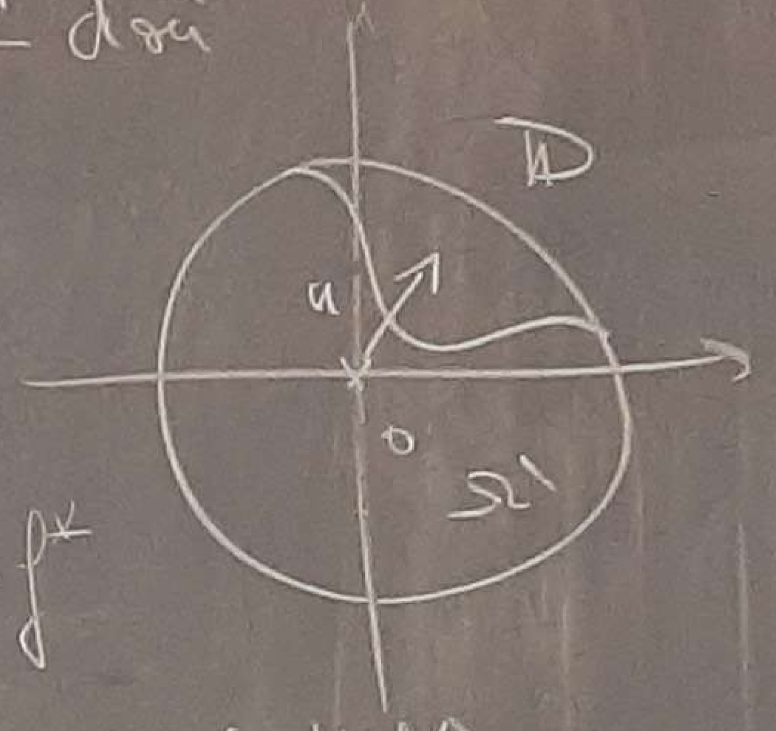
Posons enfin $u : \varphi_{y_0} \circ \sqrt{\varphi_{z_0}}$.

Alors u est $\in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ | injective, à valeurs dans $\mathbb{D}$, $u(0) = 0$.

De plus,

$$u'(0) = \varphi'_{y_0}(y_0) \frac{\varphi'_{z_0}(0)}{2\sqrt{\varphi_{z_0}(0)}} = \frac{1}{|y_0|^2 - 1} \cdot \frac{|z_0|^2 - 1}{2 y_0}$$

$$= \frac{|y_0|^2 + 1}{2 y_0} \text{ d'où}$$



$|u'(0)| > 1$.

Posons $f^{**} = u \circ f^*$

d'où $|f^{**\prime}(0)| = \underbrace{|u'(0)|}_{> 1} |f^{*\prime}(0)|$

et f^{**} | $\in \mathcal{H}(\Omega)$, injective, $f^{**}(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$, $f^{**}(0) = 0$, $|f^{**\prime}(0)| \geq 1$,

contradiction avec $f^* = \mathrm{argmax}\, \phi$.

□