Méthode d'accélération de Tcheb.

Contexte $Ax = b$ dans $\mathbb{R}^d$, de solution x^*. $A \in GL_d(\mathbb{R})$

Un splitting $A = M - N$, $\begin{cases} B = M^{-1}N \\ C = M^{-1}b \end{cases}$.

$Ax^* = b \iff x^* = Bx^* + c$

On pose $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^d \\ x_{m+1} = Bx_m + c \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$,

(x_m) CV $\iff \rho(B) < 1$ car l'erreur $\forall e_0$ $\quad e_k = x_k - x^* = B^k e_0$.

But modifier $x_k \longrightarrow y_k$ à chaque étape pour avoir $\varepsilon_k = y_k - x^*$ CV (+) vite.

On cherche $y_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x_i$.

Rq Si $x_0 = x^*$, (x_m) est stationnaire.

On impose $x^* = y_k = \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)}}_{=1}\right) x^*$

Alors $\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x_i - x^* = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} (\underbrace{x_i - x^*}_{B^i e_0}) = P_k(B) e_0$

où $\boxed{P_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} X^i}$.

On cherche donc $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ t.q. $\begin{cases} P_k(1) = 1 \\ \rho(P_k(B)) \text{ est minimal.} \end{cases}$

Si $\begin{cases} B \text{ n'a que des valeurs réelles}, \\ \rho(B) < 1, \end{cases}$

on veut minimiser $\max_{\lambda \in Sp(B)} |P_k(\lambda)|$

$Sp(B) = \{-1 < \lambda_1 \le \dots \le \lambda_d < 1\}$

Lemme Si $\alpha \notin [a,b]$, alors

$P_{k,\alpha} = \dfrac{T_k\left(\frac{b+a-2X}{b-a}\right)}{T_k\left(\frac{b+a-2\alpha}{b-a}\right)}$ minimise $\| \ \|_{\infty,[a,b]}$

sur $E_{k,\alpha} = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(\alpha) = 1\}$.

Rappel T_n atteint ses extrema sur $[-1,1]$ pour les $x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$, $i \in [\![0,n]\!]$

avec $T_n(x_i) = (-1)^i$.

Preuve On se ramène à $[a,b] = [-1,1]$ et $|\alpha| > 1$, d'où $P_{k,\alpha} = \dfrac{T_k(X)}{T_k(\alpha)}$.

$P_{k,\alpha} \in E_{k,\alpha}$ et

$\|P_{k,\alpha}\|_{\infty,[-1,1]} = \dfrac{1}{|T_k(\alpha)|}$.

Supposons $Q \in E_{k,\alpha}$ avec $\|Q\|_\infty > \dfrac{1}{|T_k(\alpha)|}$.

Posons $R = P_{k,\alpha} - Q \in \mathbb{R}_k[X]$.

R s'annule en α, et

$T_k(\alpha) R(x_i) = \underbrace{T_k(\alpha) P_{k,\alpha}(x_i)}_{=(-1)^i} - \underbrace{T_k(\alpha) Q(x_i)}_{\in]-1,1[}$.

donc par TVI, R admet k racines distinctes sur $]-1,1[$.

Avec α, on en a $k+1$ d'où $R = 0$ et $Q = P_{k,\alpha}$, absurde. □

Comme on ne connaît pas λ_1, λ_d, mais

$[\lambda_1, \lambda_d] \subseteq [-\rho(B), \rho(B)]$,

on prend donc en pratique

$\boxed{P_k = \dfrac{T_k(X/\rho(B))}{T_k(1/\rho(B))}}$ $\quad 1 > |\rho(B)|$

qui minimise $\| \ \|_{\infty,[-\rho(B),\rho(B)]}$ sur $\{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(1) = 1\}$.

But Exprimer les y_k sans les T_k.

Th. Soit $B \in H_d(\mathbb{C})$, $\rho(B) < 1$.

On pose $\begin{cases} y_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad y_1 = x_1 = Bx_0 + c \\ y_{k+1} = \omega_{k+1}(By_k + c - y_{k-1}) + y_{k-1} \quad \forall k \ge 1 \end{cases}$

où $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \dfrac{2}{2 - \rho(B)^2}$, $\omega_{k+1} = \dfrac{4}{4 - \rho(B)^2 \omega_k}$.

Alors $\|\varepsilon_k\|_2 \le \dfrac{1}{T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)} \|\varepsilon_0\|_2$.

Preuve Montrer que y_k définis par les P_k vérifient cette récurrence.

Si c'est le cas,

$\|\varepsilon_k\|_2 \le \underbrace{\|P_k(B)\|_{2,2}}_{=\rho(P_k(B))} \|\varepsilon_0\|_2 \le \overbrace{\|P_k\|_{\infty,[-\rho(B),\rho(B)]}}^{1/T_k(B)} \|\varepsilon_0\|_2$

Allons-y : on a $\begin{cases} T_0 = 1 \qquad T_2 = 2X^2 - 1 \\ T_1 = X \\ T_{m+2} = 2XT_{m+1} - T_m \quad \forall m \end{cases}$

$P_0 = 1$

$P_1 = \dfrac{X/\rho(B)}{1/\rho(B)} = X = a_1^{(1)} X + a_0^{(1)}$

D'où $\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = x_1 \end{cases}$.

Si $\rho = \rho(B)$,

$T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho}\right) P_{k+1} = \dfrac{2X}{\rho} T_k\left(\frac{1}{\rho}\right) P_k - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) P_{k-1}$

En B puis en e_0, on obtient

$T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \underbrace{\varepsilon_{k+1}}_{= y_{k+1} - x^*} = \dfrac{2}{\rho} T_k\left(\frac{1}{\rho}\right) \underbrace{B\varepsilon_k} - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \underbrace{\varepsilon_{k-1}}_{= y_{k-1} - x^*}$

$B\varepsilon_k = B(y_k - x^*) = By_k - Bx^* = By_k - x^* + c$

d'où

$y_{k+1} - x^* = \dfrac{2}{\rho} \dfrac{T_k(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)} (By_k + c - x^*) - \dfrac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)} (y_{k-1} - x^*)$

Or $1 = \dfrac{2}{\rho} \dfrac{T_k(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)} - \dfrac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)}$

d'où

$y_{k+1} - \cancel{x^*} = \dfrac{2}{\rho} \dfrac{T_k(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)} (By_k + c) - \dfrac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)} y_{k-1} \cancel{- x^*}$

d'où la relation attendue,

avec $\omega_{k+1} = \dfrac{2T_k(1/\rho)}{\rho T_{k+1}(1/\rho)}$, ainsi

$\omega_2 = \dfrac{2 \cdot 1/\rho}{\rho\left(2\frac{1}{\rho^2} - 1\right)} = \dfrac{2}{2 - \rho^2}$ et

$\omega_{k+1} = \dfrac{2T_k(1/\rho)}{\rho\left(\frac{2}{\rho} T_k\left(\frac{1}{\rho}\right) - T_{k-1}(1/\rho)\right)} = \dfrac{2}{\rho\left(\frac{2}{\rho} - \frac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_k(1/\rho)}\right)}$

$= \dfrac{1}{1 - \frac{\rho}{2} \frac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_k(1/\rho)}} = \dfrac{4}{4 - \rho^2 \omega_k}$

Méthode d'accélération de Tcheb.

Contexte $Ax = b$ dans $\mathbb{R}^d$, de solution x^*. $A \in GL_d(\mathbb{R})$

Le splitting $A = M - N$, $\begin{cases} B = M^{-1}N \\ C = M^{-1}b \end{cases}$.

$Ax^* = b \iff x^* = Bx^* + C$

On pose $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^d \\ x_{m+1} = Bx_m + C \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$

fini CV $\forall e_0$ $\iff \rho(B) < 1$ car l'erreur $e_k = x_k - x^* = B^k e_0$.

But modifier $x_k \to y_k$ à chaque étape pour avoir $\varepsilon_k = y_k - x^*$ CV (+) vite.

On cherche $y_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x_i$.

Rq Si $x_0 = x^*$, (x_m) est stationnaire.

On impose $x^* = y_k = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)}\right)}_{=1} x^*$.

Alors $\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x_i - x^* = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} \underbrace{(x_i - x^*)}_{B^i e_0} = P_k(B) e_0$

où $\boxed{P_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)}}$.

On cherche donc $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ t.q.
$\begin{cases} P_k(1) = 1 \\ \rho(P_k(B)) \text{ soit minimal.} \end{cases}$

Si $\left\| \begin{cases} B \text{ n'a que des valeurs réelles,} \\ \rho(B) < 1, \end{cases} \right.$

on veut minimiser $\max_{\lambda \in \underbrace{Sp(B)}_{=\{-1 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d < 1\}}} |P_k(\lambda)|$

Lemme Si $\alpha \notin [a, b]$, alors

$$P_{k,\alpha} = \frac{T_k\left(\frac{b+a-2X}{b-a}\right)}{T_k\left(\frac{b+a-2\alpha}{b-a}\right)}$$

minimise $\| \|_{\infty, [a,b]}$ sur $E_{k,\alpha} = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(\alpha) = 1\}$.

Rappel T_n atteint ses extrema sur $[-1, 1]$ en les $x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$, $i \in [\![0, n]\!]$ avec $T_n(x_i) = (-1)^i$.

Preuve On se ramène à $[a, b] = [-1, 1]$ et $|\alpha| > 1$, d'où $P_{k,\alpha} = \frac{T_k(X)}{T_k(\alpha)}$.

$P_{k,\alpha} \in E_{k,\alpha}$ et $\|P_{k,\alpha}\|_{\infty, [-1,1]} = \frac{1}{|T_k(\alpha)|}$.

Supposons $Q \in E_{k,\alpha}$ avec $\|Q\|_\infty > \frac{1}{|T_k(\alpha)|}$.

Posons $R = P_{k,\alpha} - Q \in \mathbb{R}_k[X]$.

R s'annule en α, et

$T_k(\alpha) R(x_i) = \underbrace{T_k(\alpha) P_{k,\alpha}(x_i)}_{=(-1)^i} - \underbrace{T_k(\alpha) Q(x_i)}_{\in]-1, 1[}$.

donc par TVI, R admet k racines distinctes sur $]-1, 1[$.

Avec α, on en a $k+1$ d'où $R = 0$ et $Q = P_{k,\alpha}$, absurde.

$\square$

Comme on ne connaît pas λ_1, λ_d, mais
$[\lambda_1, \lambda_d] \subseteq [-\rho(B), \rho(B)]$

on prend donc en pratique

$$\boxed{P_k = \frac{T_k\left(X/\rho(B)\right)}{T_k\left(1/\rho(B)\right)}}$$

qui minimise $\| \|_{\infty, [-\rho(B), \rho(B)]}$ sur

But Exprimer les y_k sans

Th. Soit $B \in \mathcal{H}_d(\mathbb{C})$, $\rho(B)$

On pose $\begin{cases} y_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d, \; y_1 \\ y_{k+1} = \omega_{k+1}(By_k + \end{cases}$

où $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \frac{2}{2 - \rho(B)^2}$

Alors $\|\varepsilon_k\|_2 \leq \frac{1}{T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)} \|\varepsilon$

Preuve Montrer que y_k d
vérifiant cette récurr

$\simeq [a,b] = [-1,1]$

$\alpha = \frac{T_k(X)}{T_k(\alpha)}$ -

$(\alpha)|$

$\|Q\|_\infty > \frac{1}{|T_k(\alpha)|}$

$\in \mathbb{R}_k[X]$

$(x_i) - T_k(\alpha)Q(x_i)$

$\in]-1,1[$

R admet k

$]-1,1[$

$k+1$ dù

$= P_{k,\alpha}$, atteinte -

Comme on ne connaît pas λ_1, λ_d, mais

$$[\lambda_1, \lambda_d] \subseteq [-\rho(B), \rho(B)],$$

on prend donc en pratique

$$\boxed{P_k = \frac{T_k(X/\rho(B))}{T_k(1/\rho(B))}} \qquad 1 > |\rho(B)|$$

qui minimise $\|\ \|_{\infty, [-\rho(B), \rho(B)]}$ sur $\{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(1) = 1\}$.

But Exprimer les y_k sans les T_k.

Th. Soit $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\rho(B) < 1$.

On pose
$$\begin{cases} y_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad y_1 = x_1 = Bx_0 + c \\ y_{k+1} = \omega_{k+1}(By_k + c - y_{k-1}) + y_{k-1} \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

où $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \frac{2}{2 - \rho(B)^2}$, $\omega_{k+1} = \frac{4}{4 - \rho(B)^2 \omega_k}$.

Alors $\|\varepsilon_k\|_2 \leq \frac{1}{T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)} \|\varepsilon_0\|_2$.

Preuve Montrons que y_k définis par les P_k vérifient cette récurrence.

Si c'est le cas,

$$\|\varepsilon_k\|_2 \leq \underbrace{\|P_k(B)\|_{2,2}}_{=\rho(P_k(B))} \|\varepsilon_0\|_2 \leq \overbrace{\|P\|_{\infty, [-\rho(B), \rho(B)]}}^{1/T_k(B)} \|\varepsilon_0\|_2$$

Allons-y : on a
$$\begin{cases} T_0 = 1 \quad T_2 = 2X^2 - 1 \\ T_1 = X \\ T_{m+2} = 2XT_{m+1} - T_m \quad \forall m \end{cases}$$

$P_0 = 1$

$P_1 = \frac{X/\rho(B)}{1/\rho(B)} = X = a_1^{(1)}X + a_0^{(1)}$

D'où $\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = x_1 \end{cases}$

Si $\rho = \rho(B)$,

$$T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho}\right)P_{k+1} = \frac{2X}{\rho} T_k\left(\frac{1}{\rho}\right)P_k - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)P_{k-1}$$

En B puis en ε_0, on obtient

$$T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho}\right)\underbrace{\varepsilon_{k+1}}_{= y_{k+1} - x^*} = \frac{2}{\rho} T_k\left(\frac{1}{\rho}\right)\underbrace{B\varepsilon_k}_{\substack{= B(y_k - x^*) \\ = By_k - Bx^* \\ = By_k - x^* + c}} - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)\underbrace{\varepsilon_{k-1}}_{= y_{k-1} - x^*}$$

d'où :

$$y_{k+1} - x^* = \frac{2}{\rho}\frac{T_k(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)}(By_k + c - x^*) - \frac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)}(y_{k-1} - x^*)$$

Or : $1 = \frac{2}{\rho}\frac{T_k(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)} - \frac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)}$

d'où

$$y_{k+1} - \cancel{x^*} = \frac{2}{\rho}\frac{T_k(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)}(By_k + c) - \frac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_{k+1}(1/\rho)}y_{k-1} \cancel{- x^*}$$

d'où la relation attendue,

avec $\omega_{k+1} = \frac{2T_k(1/\rho)}{\rho T_{k+1}(1/\rho)}$, avec :

$\omega_2 = \frac{2\, 1/\rho}{\rho(2\frac{1}{\rho^2} - 1)} = \frac{2}{2 - \rho^2}$ et

$$\omega_{k+1} = \frac{2T_k(1/\rho)}{\rho\left(\frac{2}{\rho}T_k\left(\frac{1}{\rho}\right) - T_{k-1}(1/\rho)\right)} = \frac{2}{\rho\left(\frac{2}{\rho} - \frac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_k(1/\rho)}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\rho}{2}\frac{T_{k-1}(1/\rho)}{T_k(1/\rho)}} = \frac{4}{4 - \rho^2\omega_k}$$