

Méthode d'accélération de Cheb.

Contexte:  $Ax=b$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  
 et solution  $x^* \in \text{ACG}(\mathbb{R})$   
 Le splitting  $A = B - C$ ,  $B = \pi^{-1}N$ ,  
 $C = \pi^{-1}b$ .

$Ax=b \Leftrightarrow x^* = B^{-1}x + c$   
 On pose  $x_0 \in \mathbb{R}^d$   
 $x_{k+1} = B^{-1}x_k + c$   $\forall k \in \mathbb{N}^+$   
 On a  $x^* = B^{-1}x^* + c$   
 On a  $x_k - x^* = B^{-1}(x_k - x^*)$

But: multiplier  $m \rightarrow y_k$  de type  
 pour avoir  $\|y_k - x^*\| \leq \rho^k \|y_0 - x^*\|$   
 On cherche  $y_k = \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} x_i$

On pose  $x_0 = x^*$  (ou autre chose)  
 On suppose  $x^* = y_k = \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} x_i$   
 On a  $a_0 = 1$   
 On a  $a_k = \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} x_i - x^* = \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} (x_i - x^*) = \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} B^{-1}(x_i - x^*) = B^{-1} \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} (x_i - x^*)$

On a  $T_h = \sum_{i=0}^h (-1)^i \binom{h}{i} (x_i - x^*)$   
 On cherche dans  $T_h \in \mathbb{R}_h[X]$   $1 < \rho$   
 $\begin{cases} T_h(1) = 1 \\ \rho(T_h(B)) \text{ est minimal} \end{cases}$   
 $\rho(B) < 1$   
 On veut minimiser  $\max_{t \in \mathbb{D}(B)} |T_h(t)|$   
 $\mathbb{D}(B) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$

Lemme:  $\alpha \in [a, b]$ , alors  
 $T_{h,\alpha} = \frac{T_h(\frac{b(a-x)+2x}{b-a})}{T_h(\frac{b(a-2x)}{b-a})}$  minimise  $\|T_{h,\alpha}\|_{\infty, [a,b]}$   
 on a  $E_{h,\alpha} = \{D \in \mathbb{R}[X] \mid P(D) = 1\}$   
 Rappel:  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$  en  $P(1,1)$   
 on a  $T_n(x) = \cos(\frac{n \arccos(x)}{\arccos(\alpha)})$

Preuve: On se ramène à  $[a,b] = [-1,1]$   
 et  $h \geq 1$ , d'où  $T_{h,\alpha} = \frac{T_h(x)}{T_h(\alpha)}$   
 on peut donc le noter  
 $T_h = \frac{T_h(x/p(B))}{T_h(1/p(B))}$   $1 > \rho(B)$   
 On suppose  $Q \in E_{h,\alpha}$  on a  $\|Q\|_{\infty} > \frac{1}{|T_h(\alpha)|}$   
 Posons  $R = T_{h,\alpha} - Q \in \mathbb{R}_h[X]$   
 $R$  s'annule en  $\alpha$ , et  
 $T_h(\alpha)R(x_i) = T_h(\alpha)T_{h,\alpha}(x_i) - T_h(\alpha)Q(x_i)$   
 $= (-1)^i \in ]-1,1[$   
 donc par TVI,  $R$  admet  $h$   
 racines distinctes en  $]-1,1[$   
 Avec  $\alpha$ , on a  $h+1$  racines  
 $R=0$  et  $Q = T_{h,\alpha}$ , c'est tout.

Comme on se ramène à  $[-1,1]$ , on a  
 $[1,1] \subseteq [-\rho(B), \rho(B)]$   
 on peut donc le noter  
 $T_h = \frac{T_h(x/p(B))}{T_h(1/p(B))}$   $1 > \rho(B)$   
 On suppose  $Q \in E_{h,\alpha}$  on a  $\|Q\|_{\infty} > \frac{1}{|T_h(\alpha)|}$   
 Posons  $R = T_{h,\alpha} - Q \in \mathbb{R}_h[X]$   
 $R$  s'annule en  $\alpha$ , et  
 $T_h(\alpha)R(x_i) = T_h(\alpha)T_{h,\alpha}(x_i) - T_h(\alpha)Q(x_i)$   
 $= (-1)^i \in ]-1,1[$   
 donc par TVI,  $R$  admet  $h$   
 racines distinctes en  $]-1,1[$   
 Avec  $\alpha$ , on a  $h+1$  racines  
 $R=0$  et  $Q = T_{h,\alpha}$ , c'est tout.

Si c'est le cas,  $1/T_h(B)$   
 $\|E_{h,\alpha}\|_{\infty} \leq \|T_{h,\alpha}\|_{\infty} \leq \frac{1}{|T_h(\alpha)|} \|T_h\|_{\infty} \|T_{h,\alpha}\|_{\infty}$   
 $= \frac{1}{|T_h(\alpha)|}$   
 Alors  $y_k = \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} x_i$   
 On a  $y_0 = x_0$   
 $y_1 = x_1$   
 Si  $\rho < \rho(B)$ ,  
 $T_{h,\alpha}(1/p) T_{h+1} = \frac{2x}{p} T_h(1/p) T_h - T_{h-1}(1/p) T_{h-1}$   
 En  $B$  puis en  $x_0$ , on obtient  
 $T_{h+1}(1/p) x_{k+1} = \frac{2x}{p} T_h(1/p) B x_k - T_{h-1}(1/p) x_{k-1}$   
 $= y_{k+1} - x^* = B(y_k - x^*) - T_{h-1}(1/p) x_{k-1}$   
 $= B y_k - B x^* - T_{h-1}(1/p) x_{k-1}$   
 $= B y_k - x^* + c$

On a  $y_{k+1} - x^* = \frac{2 T_h(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} (B y_k - x^*) - \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} (y_{k-1} - x^*)$   
 On a  $1 = \frac{2 T_h(1/p)}{p T_{h+1}(1/p)} - \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_{h+1}(1/p)}$   
 On a  
 $y_{k+1} - x^* = \frac{2 T_h(1/p)}{p T_{h+1}(1/p)} (B y_k - x^*) - \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} (y_{k-1} - x^*)$   
 On a la relation attendue,  
 avec  $\alpha_{k+1} = \frac{2 T_h(1/p)}{p T_{h+1}(1/p)}$ , car  
 $\omega_2 = \frac{2/p}{p(2/p-1)} = \frac{2}{2-p^2}$  et  
 $\omega_{h+1} = \frac{2 T_h(1/p)}{p(2 T_h(1/p) - T_{h-1}(1/p))} = \frac{2}{p(2 - \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_h(1/p)})}$   
 $= \frac{1}{1 - \frac{p T_{h-1}(1/p)}{2 T_h(1/p)}} = \frac{1}{1 - p^2}$

Méthode d'accélération de Tcheb.

Contexte  $Ax = b$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  
de solution  $x^*$ .  $A \in GL_d(\mathbb{R})$

Le splitting  $A = M - N$ ,  $B = M^{-1}N$   
 $C = M^{-1}b$ .

$Ax = b \Leftrightarrow x^* = Bx^* + C$   
On pose  $x_0 \in \mathbb{R}^d$   
 $x_{n+1} = Bx_n + C \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

fic. cv  $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$  car il existe  
 $\forall \epsilon_0 \quad e_h = x_h - x^* = B^h e_0$

But malin,  $x_h \rightarrow y_h$  : chaque étape  
pour avoir  $\epsilon_h = y_h - x^* \ll \epsilon_0$

On cherche  $y_k = \sum_{i=0}^k a_i^{(h)} x_i$

Rq  $x_0 = x^*$ ,  $(x_n)$  st stationnaire.

On impose  $x^* = y_k = \left( \sum_{i=0}^k a_i^{(h)} \right) x^*$   
 $= 1$

Alors  $\epsilon_h = \sum_{i=0}^k a_i^{(h)} x_i - x^* = \sum_{i=0}^k a_i^{(h)} (x_i - x^*) = P_k(B) e_0$

Où  $P_k = \sum_{i=0}^k a_i^{(h)}$

On cherche donc  $P_h \in \mathbb{R}_h[X]$  l.p.  
 $\begin{cases} P_h(1) = 1 \\ \rho(P_h(B)) \text{ est minimal} \end{cases}$

$\sum \left\{ \begin{array}{l} B \text{ n'a pas de racines réelles,} \\ \rho(B) < 1, \end{array} \right.$

on veut minimiser  $\max_{\lambda \in \text{Sp}(B)} |P_h(\lambda)|$   
 $= \{-1 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d < 1\}$

Lemme  $\lambda \in [a, b]$ , alors

$P_{h,\alpha} = \frac{T_h\left(\frac{b+a-2x}{b-a}\right)}{T_h\left(\frac{b+a-2\alpha}{b-a}\right)}$  minimise  $\| \cdot \|_{\infty, [a,b]}$

on  $E_{k,\alpha} = \{ P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(\alpha) = 1 \}$

Rappel  $T_n$  atteint ses extrema sur  $[-1, 1]$   
en  $\lambda_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), i \in [0, n]$

avec  $T_n(\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)) = (-1)^i$

Preuve On se ramène à  $E_{1,1} = [-1, 1]$   
et  $|\lambda| > 1$ , d'où  $T_{h,\alpha} = \frac{T_h(x)}{T_h(\alpha)}$

$T_{h,\alpha} \in E_{h,\alpha}$  et  
 $\|T_{h,\alpha}\|_{\infty, [-1,1]} = \frac{1}{|T_h(\alpha)|}$

Supposons  $Q \in E_{h,\alpha}$  avec  $\|Q\|_{\infty} > \frac{1}{|T_h(\alpha)|}$

Posez  $R = T_{h,\alpha} - Q \in \mathbb{R}_h[X]$

$R$  s'annule en  $\alpha$ , et

$T_h(\alpha)R(x_i) = T_h(\alpha)P_{h,\alpha}(x_i) - T_h(\alpha)Q(x_i)$   
 $= (-1)^i \in ]-1, 1[$

donc par TVI,  $R$  admet  $h$   
racines distinctes sur  $]-1, 1[$

Avec  $\alpha$ , on en a  $h+1$  d'où

$R = 0$  et  $Q = T_{h,\alpha}$ , absurde.  $\square$

Comme on ne connaît pas  $\lambda_1, \lambda_d$ ,  
 $[-1, 1] \subseteq [-\rho(B), \rho(B)]$   
on prend donc le polynôme

$P_h = \frac{T_h(x/\rho(B))}{T_h(1/\rho(B))}$

qui minimise  $\| \cdot \|_{\infty, [-\rho(B), \rho(B)]}$

But Explique les  $y_h$  dans

$T_h$  soit  $B \in \mathbb{R}^d$ ,  $\rho(B)$

On pose  $y_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $y_k$

$y_{k+1} = \omega_{k+1} (By_k + C)$

où  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \frac{2}{2 - \rho(B)^2}$

Alors  $\| \epsilon_k \|_2 \leq \frac{1}{T_h\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)} \| \epsilon_0 \|_2$

Preuve Noter que  $y_k$  de  
vérifiant cette récurrence

$$\alpha = \frac{T_h(x) - T_h(x_0)}{T_h(x_1) - T_h(x_0)}$$

$$\|Q\|_\infty > \frac{1}{|T_h(x)|}$$

$$T_h(x) - T_h(x_0) \in ]-1, 1[$$

$$R \text{ admet la}$$

$$h+1 \text{ de}$$

Preuve

Comme on ne connaît pas la dd, mais  $[T_h(x_0), T_h(x_1)] \subseteq [-p(B), p(B)]$ , on prend donc la primitive

$$P_h = \frac{T_h(x/p(B))}{T_h(1/p(B))} \quad 1 > |p(B)|$$

On minimise  $\|T_h \circ P_h\|_\infty$  sur  $\{P \in \mathcal{P}_h(x) \mid P(1) = 1\}$ .

But Exprime les  $y_h$  dans les  $T_h$ .

$T_h$  sont  $B \in \mathbb{R}^d$ ,  $p(B) < 1$ .

$$\text{On pose } \begin{cases} y_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d, & y_i = x_i = Bx_0 + c \\ y_{h+1} = \omega_{h+1}(By_h + c - y_{h-1}) + y_{h-1} \end{cases}$$

$$\text{où } \omega_1 = 1, \omega_2 = \frac{2}{2 - p(B)^2}, \omega_{h+1} = \frac{4}{4 - p(B)^{2h}}$$

$$\text{Alors } \|E_h\|_2 \leq \frac{1}{T_h(1/p(B))} \|E_0\|_2$$

Preuve Noter que  $y_h$  définies par les  $T_h$  vérifient cette récurrence.

$$\|E_h\|_2 \leq \frac{1}{T_h(1/p(B))} \|E_0\|_2 \leq \frac{1}{T_h(1/p(B))} \|E_0\|_2 = p(B)^h \|E_0\|_2$$

Alors  $y_i$  on a

$$\begin{cases} T_0 = 1 & T_2 = 2x^2 - 1 \\ T_1 = x \\ T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = \frac{x/p(B)}{1/p(B)} = x = a_1 x + a_0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$

Si  $p = p(B)$ ,

$$T_{h+1}\left(\frac{1}{p}\right) P_{h+1} = \frac{2x}{p} T_h\left(\frac{1}{p}\right) P_h - T_{h-1}\left(\frac{1}{p}\right) P_{h-1}$$

En  $B$  puis en  $x_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} T_{h+1}\left(\frac{1}{p}\right) P_{h+1} &= \frac{2}{p} T_h\left(\frac{1}{p}\right) B E_h - T_{h-1}\left(\frac{1}{p}\right) E_{h-1} \\ &= y_{h+1} - x^* = B(y_h - x^*) = B y_h - B x^* = y_{h-1} - x^* \\ &= B y_h - x^* + c \end{aligned}$$

$$\text{donc } y_{h+1} - x^* = \frac{2}{p} \frac{T_h(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} (B y_h + c - x^*) - \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} (y_{h-1} - x^*)$$

$$\text{donc } 1 = \frac{2}{p} \frac{T_h(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} - \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_{h+1}(1/p)}$$

$$\text{donc } y_{h+1} - x^* = \frac{2}{p} \frac{T_h(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} (B y_h + c) - \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_{h+1}(1/p)} y_{h-1}$$

d'où la relation attendue,

$$\text{avec } \omega_{h+1} = \frac{2 T_h(1/p)}{p T_{h+1}(1/p)}, \text{ avec}$$

$$\omega_2 = \frac{2/p}{p(2/p^2 - 1)} = \frac{2}{2 - p^2} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \omega_{h+1} &= \frac{2 T_h(1/p)}{p (2/p T_h(1/p) - T_{h-1}(1/p))} = \frac{2}{p (2/p - T_{h-1}(1/p)/T_h(1/p))} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{p}{2} \frac{T_{h-1}(1/p)}{T_h(1/p)}} = \frac{4}{4 - p^2 \omega_h} \end{aligned}$$