Prop $G = PSL_4(\mathbb{F}_2)$, $H = PSL_3(\mathbb{F}_4)$.

Alors ① $|G| = |H|$;
② $G \not\simeq H$.

$$\begin{tikzcd} SL_n(\mathbb{F}_q) \arrow[r, hook] \arrow[d] & GL_n(\mathbb{F}_q) \arrow[dl] \\ PSL_n(\mathbb{F}_q) & \end{tikzcd}$$

⓪ G, H sont simples car $4, 3 \geq 3$

① ★ $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$?

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\cdots(q^n - q^{n-1})$$

★ $|SL_n(\mathbb{F}_q)|$?

$\det : GL_n(\mathbb{F}_q) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_q^*$

$\ker \det = SL_n$

D'où $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

★ $|PSL_n(\mathbb{F}_q)|$?

$PSL_n(\mathbb{F}_q) = SL_n(\mathbb{F}_q) / \underbrace{\{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{F}_q^*\} \cap SL_n(\mathbb{F}_q)}_{\Leftrightarrow\ \lambda \in U_n(\mathbb{F}_q)}$

car $\det(\lambda I_n) = \lambda^n = 1$.

$|U_n(\mathbb{F}_q^*)|$? On a $\mathbb{F}_q^* \overset{\varphi}{\simeq} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$

$\lambda^n = 1 \Leftrightarrow n\underbrace{\varphi(\lambda)}_{\bar{x}} = 0$

$\Leftrightarrow nx \equiv 0\ [q-1]$

$d = n \wedge (q-1)$ car $(q-1)^{\cdots}x \equiv 0\ [q-1]$ $\Leftrightarrow dx \equiv 0\ [q-1]$

$\Leftrightarrow x = k\dfrac{q-1}{d}$, $k \in [\![0, d[\![$,

d'où $|U_n(\mathbb{F}_q^*)| = d$ et

$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{d}$ (Lagrange)

<u>Application</u>

★ $|PSL_3(\mathbb{F}_4)| = \dfrac{(4^3-1)(4^3-4)(4^3-4^2)}{3 \cdot 3}$

$= 20\,160$.

★ $PSL_4(\mathbb{F}_2) = SL_4(\mathbb{F}_2) = GL_4(\mathbb{F}_2)$

$|G| = (2^4-1)\cdots(2^4-2^3) = 20\,160$.

② Soit ν le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2, invariant.

<u>Mq</u> $\nu(G) \neq \nu(H)$, à savoir :

$\begin{cases} \nu(G) \geq 2 & Ⓐ \\ \nu(H) = 1. & Ⓑ \end{cases}$

Ⓐ Soit $M \in GL_4(\mathbb{F}_2)$, telle que $M^2 = I_4$, $M \neq I_4$.

$(M - I_4)^2 = 0$, donc $M = I_4 + N$, où N est nilp. d'ordre 2,

$N^2 = 0$, d'où $\operatorname{Im} N \subseteq \ker N$ d'où (par rang) :

$\operatorname{rg}(N) \leq 4 - \operatorname{rg}(N)$

$\operatorname{rg}(N) \leq \frac{4}{2} = 2$.

Prenons $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

N_1, N_2 sont nilpotentes d'ordre 2, $\operatorname{rg} N_1 = 1$, $\operatorname{rg} N_2 = 2$

donc $N_1 \not\sim N_2$, $M_1 = I_4 + N_1 \not\sim M_2 = I_4 + N_2$

Donc $\nu(G) \geq 2$.

Ⓑ But Mq $\begin{cases} \nu(GL_3(\mathbb{F}_4)) = 1 & (\alpha) \\ \nu(SL_3(\mathbb{F}_4)) = 1 & (\beta) \\ \nu(PSL_3(\mathbb{F}_4)) = \nu(H) = 1. & (\gamma) \end{cases}$

(α) $M \in GL_3(\mathbb{F}_4)$ d'ordre 2. Alors

$M = I_3 + N$ où $\operatorname{rg}(N) \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$.
$\ \ 0 \neq$

<u>Fait</u> Toutes les matrices nilpotentes d'ordre 2 de rang 1 sont conjuguées dans $GL_3(\mathbb{F}_4)$

En effet. Soit $x \notin \ker(N)$, $Nx \in \ker N$, soit y tel que (Nx, y) base de $\ker N$.

Alors.

$$N \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Nx & x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} Nx \\ x \\ y \end{array}$$

$= E_{12}$

Ainsi, $M \sim I_3 + E_{12} =: \sigma \in SL_3(\mathbb{F}_4)$

$\boxed{M \in [\sigma]}$

(β) Si $M \in SL_3(\mathbb{F}_4)$ d'ordre 2, alors

$M = P^{-1}\sigma P$, $P \in GL_3(\mathbb{F}_4)$

Posons $D = \begin{pmatrix} \det(P)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Q = PD \in SL_3(\mathbb{F}_4)$

Alors $DE_{12} = E_{12}D$

Donc $M = Q^{-1}\sigma Q$, $D\sigma \overset{\text{donc}}{=} \sigma D$

Alors $\boxed{M \in [\sigma]_{SL_3(\mathbb{F}_4)}}$

(γ) $\bar{M}^2 = \bar{I}_3$, $M \in SL_3(\mathbb{F}_4)$

Alors $M^2 = \lambda I_3$ où $\lambda \in \mathbb{F}_4$.

Soit $\mu \in \mathbb{F}_4$ t.q. $\mu^2 = \lambda$,

$\mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$
$x \mapsto x^2$
$\in \operatorname{Aut}(\mathbb{F}_4)$

et prenons $M' = \mu^{-1}M$

Alors $\det(M') = \underbrace{\mu^{-3}}_{=1 \text{ dans } \mathbb{F}_4}\underbrace{\det(M)}_{=1} = 1$

et $M'^2 = \mu^{-2}M^2 = \mu^{-2}\lambda I_3 = I_3$;

$M' \neq I_3$ sinon, $M = \mu I_3$ est scalaire.

D'où grâce à ce qui précède : $M' = Q^{-1}\sigma Q$

Donc $\overline{M'} = \bar{M}$

$\bar{M} = \overline{M'} = \overline{Q}^{-1}\bar{\sigma}\bar{Q}$ et $\boxed{\bar{M} \in [\bar{\sigma}]}$

D'où $\nu(H) = 1$.

Prop $G = PSL_4(\mathbb{F}_2)$, $H = PSL_3(\mathbb{F}_4)$.

Alors ① $|G| = |H|$;

② $G \not\simeq H$.

$$\begin{tikzcd} SL_n(\mathbb{F}_q) \arrow[r, hook] \arrow[d] & GL_n(\mathbb{F}_q) \arrow[dl, dashed] \\ PSL_n(\mathbb{F}_q) & \end{tikzcd}$$

⓪ G, H sont simples, car $4, 3 \geq 3$

① * $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$?

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})$$

* $|SL_n(\mathbb{F}_q)|$?

$\det : GL_n(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{F}_q^*$

$\ker \det = SL_n$

Donc $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

* $|PSL_n(\mathbb{F}_q)|$?

$$PSL_n(\mathbb{F}_q) = SL_n(\mathbb{F}_q) / \underbrace{\{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{F}_q^*\} \cap SL_n(\mathbb{F}_q)}$$

car $\det(\lambda I_n) = \lambda^n = 1 \iff \lambda \in U_n(\mathbb{F}_q)$

$|U_n(\mathbb{F}_q^*)|$? On a : $\mathbb{F}_q^* \overset{\varphi}{\simeq} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$

$\lambda^n = 1 \iff n\underbrace{\varphi(\lambda)}_{\bar{x}} = 0$

$\iff nx = 0\ [q-1]$

$d = n \wedge (q-1)$ $\iff dx = 0\ [q-1]$

car $(q-1)x \equiv 0\ [q-1]$

$\iff x = k\dfrac{q-1}{d}$, $k \in [\![0, d[\![$,

d'où $|U_n(\mathbb{F}_q^*)| = d$ et

$$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{d} \text{ (Lagrange)}$$

Application :

* $|PSL_3(\mathbb{F}_4)| = \dfrac{(4^3-1)(4^3-4)(4^3-4^2)}{3 \cdot 3}$

$= 20\,160$.

* $PSL_4(\mathbb{F}_2) = SL_4(\mathbb{F}_2) = GL_4(\mathbb{F}_2)$

$|G| = (2^4-1)\cdots(2^4-2^3) = 20\,160$.

② Soit ν le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2, invariant.

Mq $\nu(G) \neq \nu(H)$, à savoir :

$\begin{cases} \nu(G) \geq 2 & Ⓐ \\ \nu(H) = 1 & Ⓑ \end{cases}$

Ⓐ Soit $M \in GL_4(\mathbb{F}_2)$, telle que $M^2 = I_4$, $M \neq I_4$.

$(M - I_4)^2 = 0$, donc $M = I_4 + N$, où N est nilp. d'ordre 2.

$N^2 = 0$, donc $\mathrm{Im}\, N \subset \ker N$ d'où par rang :

$rg(N) \leq 4 - rg(N)$

$rg(N) \leq \frac{4}{2} = 2$.

Prenons $N_1 = ($

N_1, N_2 sont nilpotents

donc $N_1 \not\sim N_2$,

Donc $\nu(G) \geq 2$.

Ⓑ But Mq

$M \in GL_3(\mathbb{F}_4)$

$M = I_3 + N$ où

$0 \neq$

Fait. Toutes les matrices de rang 1 sont

En effet. Soit $x \notin$

Soit y tel que

$) = Gl_4(\mathbb{F}_2)$

$) = 20160.$

de classes de ... d'ordre 2, invariant ... à savoir: (A) (B)

... $(\mathbb{F}_2)$, telles que $\Pi^2 = I_4$, $\Pi \neq I_4$. donc $\Pi = I_4 + N$ où N est nilp. d'ordre 2, ... $\ker N$ ... rang ... $\leq 4 - rg(N)$ ... $(N) \leq \frac{4}{2} = 2$.

Prenons $N_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$

N_1, N_2 sont nilpotents d'ordre 2, $rg N_1 = 1$, $rg N_2 = 2$

donc $N_1 \not\sim N_2$, $\Pi_1 = I_4 + N_1 \not\sim \Pi_2 = I_4 + N_2$

Donc $\nu(G) \geq 2$.

(B) But : $\begin{cases} \nu(Gl_3(\mathbb{F}_4)) = 1 & (\alpha) \\ \nu(Sl_3(\mathbb{F}_4)) = 1 & (\beta) \\ \nu(PSl_3(\mathbb{F}_4)) = \nu(H) = 1 & (\gamma) \end{cases}$

(α) $\Pi \in Gl_3(\mathbb{F}_4)$ d'ordre 2. Alors

$\Pi = I_3 + N$ où $rg(N) \leq \left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $0 \neq$

Fait : Toutes les matrices nilpotentes d'ordre 2 de rang 1 sont conjuguées dans $Gl_3(\mathbb{F}_4)$.

En effet : Soit $x \notin \ker(N)$, $Nx \in \ker N$. Soit y tel que (Nx, y) base de $\ker N$.

Alors :

$$N \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Nx & x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} Nx \\ x \\ y \end{array} \end{array} = E_{12}$$

Ainsi, $\Pi \sim I_3 + E_{12} = J \in Sl_3(\mathbb{F}_4)$ $\boxed{\Pi \in [J]}$.

(β) Si $\Pi \in Sl_3(\mathbb{F}_4)$ d'ordre 2, alors

$\Pi = P^{-1} J P$, $P \in Gl_3(\mathbb{F}_4)$.

Posons $D = \begin{pmatrix} \det(P)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Q = PD \in Sl_3(\mathbb{F}_4)$.

Alors $DE_{12} = E_{12}D$

Donc $\Pi = Q^{-1} J Q$, | $DJ = JD$ puis

d'où $\boxed{\Pi \in [J]_{Sl_3(\mathbb{F}_4)}}$

(γ) $\overline{\Pi}^2 = \overline{I_3}$, $\Pi \in Sl_3(\mathbb{F}_4)$

Alors $\Pi^2 = \lambda I_3$ où $\lambda \in \mathbb{F}_4$.

Soit $\mu \in \mathbb{F}_4$ t.q. $\mu^2 = \lambda$, $\quad \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$, $x \mapsto x^2$ $\in Aut(\mathbb{F}_4)$

et posons $\Pi' = \mu^{-1}\Pi$.

Alors : $\det(\Pi') = \underbrace{\mu^{-3}}_{\substack{=1 \\ \text{dans } \mathbb{F}_4}} \underbrace{\det(\Pi)}_{=1} = 1$

et $\Pi'^2 = \mu^{-2}\Pi^2 = \mu^{-2}\lambda I_3 = I_3$;

$\Pi' \neq I_3$ sinon, $\Pi = \mu I_3$ est scalaire.

D'où par ce qui précède : $\Pi' = Q^{-1} J Q$ puis,

Comme $\overline{\Pi'} = \overline{\Pi}$:

$\overline{\Pi} = \overline{\Pi'} = \overline{Q}^{-1} \overline{J} \overline{Q}$ et $\boxed{\overline{\Pi} \in [\overline{J}]}$

D'où $\nu(H) = 1$.