Co-trigonalisation

Refs : Gourdon, algèbre et proba, p.176
Recasages : 148,151,156,159

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, F sev de E de dimension r. Alors $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$. De plus $(F^{\perp})^{\circ} = F$

Proof. Prenons $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ une base de E adaptée à F et notons $\mathcal{B}^*$ la base duale. On va montrer que $F^{\perp} = \text{Vect}(e_i^* \mid i \in \{r+1,...,n\})$.

$\boxed{\supset}$ Soit $j \in \{r+1,...,n\}$. Pour tout $i \in \{1,...,r\}$ $e_j^*(e_i) = \delta_{ij} = 0$. Donc $F = \text{Vect}(e_i \mid i \in \{1,...,r\})$ est annulé par tous les e_i^* engendrant le Vect. Et donc le Vect est inclus dans $F^{\perp}$

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in F^{\perp}$. $\mathcal{B}^*$ étant une base, il existe $(\lambda_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ tels $f = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$. Or $f \in F^{\perp}$ donc pour tout $j \in \{1,...,r\}$, $f(e_j) = 0 = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$. Donc f est bien dans le Vect.
Finalement on a bien $\dim(F^{\perp}) = \dim(\text{Vect}(e_i^* \mid i \in \{r+1,...,n\}) = n - r$.

Regardons maintenant l'égalité ensembliste.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in F$. Alors pour tout $\phi \in F^{\perp}, \phi(x) = 0$. Donc $x \in (F^{\perp})^{\circ}$.

$\boxed{\supset}$ Raisonnons sur la dimension. On sait que $\dim(F)+\dim(F^{\perp}) = n$. De la même manière, on peut montrer que $\dim((F^{\perp})^{\circ}) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E^*) = n$. Donc $\dim(F) = n - \dim(F^{\perp}) = \dim((F^{\perp})^{\circ})$
On a donc bien $F = (F^{\perp})^{\circ}$ □

Corollaire 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, F sev de E de dimension r. Il existe une famille de $n-r$ formes linéaires linéairement indépendantes $(\phi_i)_{i\in\{1,...,n-r\}}$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-r} \text{Ker}(\phi_i)$.

Proof. Par le lemme précédent , on a $F = (F^{\perp})^{\circ}$. De plus, $\dim(F^{\perp}) = n-r$. On peut donc se donner une base $(\phi_i)_{i\in\{1,...,n-r\}}$ de formes linéaires. Alors

$$\begin{aligned} F &= (F^{\perp})^{\circ} \\ &= \{x \in E \mid \forall \phi \in F^{\perp}, \phi(x) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall i \in \{1,...,n-r\}, \phi_i(x) = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n-r} \text{Ker}(\phi_i) \end{aligned}$$

□

Proposition 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$

Proof. Raisonnons par doubles implications.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons F stable par u. Soit $\phi \in F^\perp$. On a par définition ${}^t u(\phi) = \phi \circ u$. Donc pour tout $x \in F$, $0 = \phi(u(x))$ car F est stable par u. Et donc ${}^t u(\phi)(F) = \phi \circ u(F) \subset \phi(F) = \{0\}$. On a bien ${}^t u(\phi) \in F^\perp$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $F^\perp$ stable par ${}^t u$. Soit $x \in F$. Montrons que $u(x)$ appartient à F. Par le corollaire précédent, on sait qu'il existe $(\phi_i)_{i\in\{1,\ldots,n-r\}}$ des formes linéaires telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathrm{Ker}(\phi_i)$. Il suffit alors de montrer que $\forall i \in \{1, ..., n-r\}, u(x) \in \mathrm{Ker}(\phi_i)$. Or, $\phi_i(u(x)) =^t u(\phi_i)(x) = 0$ car $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. Donc $u(x) \in \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathrm{Ker}(\phi_i) = F$ □

Lemme 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ trigonalisables et commutant. Alors f et g admettent un vecteur propre commun.

Proof. f étant trigonalisable, il admet au moins une valeur propre λ. Notons E_λ l'espace propre associé. On a, par hypothèse, que g commute avec f et donc laisse stable E_λ. L'endomorphisme induit, $g_{|E_\lambda}$, est encore trigonalisable (on a $\chi_{|E_\lambda}|\chi$ scindé). Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E_λ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & a_{\dim(E_\lambda)} \end{pmatrix}$ de telle sorte que le premier vecteur de la base $\mathcal{B}$ soit un vecteur propre de f et g. □

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

1. f et g commutent
2. f et g soient trigonalisbales.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que f et g soient trigonalisables dans cette même base. On dit alors que f et g sont co-trigonalisables.

Proof. Procédons par récurrence sur la dimension. Posons $P(n)$: *" Pour tout E espace de dimension n, pour tout f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que f et g commutent et f et g soient trigonalisables, il existe une base $\mathcal{B}$ de E tels que f et g soient trigonalisables dans cette même base."*
<u>Initialisation</u> : $n = 1$. Tous les endomorphismes d'un espace de dimension 1 sont trigonalisables dans n'importe quelle base et donc co-trigonalisables.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vraie. Montrons $P(n)$. Prenons f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que f et g commutent et f et g soient trigonalisables. Alors, comme $fg = gf$ on a ${}^t g {}^t f =^t f {}^t g$, ${}^t f$ et ${}^t g$ commutent encore. De plus, ${}^t f$ et ${}^t g$ sont encore trigonalisables. En effet, $\mathrm{Mat}({}^t f) =$
${}^t\,\mathrm{Mat}(f)$ et donc les deux endomorphismes ont le même polynome caractéristique, ce qui assure que $\chi_{{}^t f}$ est scindé. Par le lemme 2, donnons nous $\phi \in E^*$ vecteur propre commun de ${}^t f$ et ${}^t g$ et notons $H = (\mathbb{K}\phi)^\circ$. Étant donné que $\mathbb{K}\phi$ est stable par ${}^t f$ et ${}^t g$, l'énoncé dual de la proposition 1 donne H stable par f et g. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits et obtenir $\mathcal{B}_1$ base de co-trigonalisation de $f_{|H}$ et $g_{|H}$. En complétant $\mathcal{B}_1$ en une base $\mathcal{B}$ de E, on obtient

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} b_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & b_n \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}$ est donc bien une base de co-trigonalisation.

$\square$