Env. convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Lemme 1: Soit E hilbert réel et C un convexe fermé. Alors
$$x \in E\setminus C \Rightarrow \exists f \in E^* \text{ tq } f(x) > \sup_{y\in C} f(y)$$

Preuve: Soit $a = p_C(x)$, on pose $f = \langle x-a ; \cdot \rangle$
$f\in E^*$ et $\underbrace{f(x-a)}_{=\|x-a\|} = f(x) - f(a) > 0$ donc $f(x) > f(a)$

Par ailleurs $\forall y \in C$, $f(y-a) = \langle x-a | y-a\rangle < 0$

Lemme 2: Soit $A \subset E$ hilbert réel :
$$x \in \overline{\mathrm{Conv}(A)} \Leftrightarrow \forall f\in E^*, f(x) \leq \sup_{y\in A} f(y)$$

Preuve: Par contraposée, si $x\in\overline{\mathrm{Conv}(A)}$ alors
$$\forall f\in E^*, f(x)\leq \sup_{y\in\overline{\mathrm{Conv}(A)}} f(y)$$

Mq $M_1 = \sup_{y\in\overline{\mathrm{Conv}(A)}} f(y) = M_2 = \sup_{y\in A} f(y)$

$M_2 \leq M_1$ par inclusion.

Soit $y\in \mathrm{Conv}(A)$ alors $\exists (\lambda_i)_{1\le i\le r}$ et $(a_i)_{1\le i\le r}$ tq $\lambda_i\in\mathbb{R}_+$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ et $\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i = y$

Alors $f(y) = \underbrace{\sum_{i=1}^r \lambda_i}_{1} \underbrace{f(a_i)}_{\leq M_2} \leq M_2$

Par passage au sup, $\sup_{y\in \mathrm{Conv}(A)} f(y) \leq M_2$

et par continuité, $\sup_{y\in\overline{\mathrm{Conv}(A)}} f(y)\leq M_2$

Soit $M_1\leq M_2$ donc $M_1 = M_2$

Lemme 3: $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow E^*$ $(E = M_n(\mathbb{R}))$
$$M \longmapsto \left(f : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ X \mapsto \mathrm{tr}(MX) \end{array}\right)$$
est un isomorphisme.

φ est linéaire par propriétés de la trace.

Si $\varphi(M)=0$, $\forall X\in M_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(MX)=0$.
En particulier $\mathrm{tr}(ME_{ij}) = m_{ji} = 0$ donc $M=0$

Donc φ injective et $\dim E = \dim E^*$ donc bijective.

Th : $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = B(0;1)$ fermée

$\subset$ $O_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(0)$ où $\phi : M \mapsto MM^T - I_n$ donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et $\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \|M\| = 1$ donc bornée (et inclu dans $B(0;1)$).
Donc $O_n(\mathbb{R})$ compact donc $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compact donc fermé donc égal à $\overline{\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))}$.
$B(0;1)$ étant fermé et convexe, on a
$\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) \subset B(0;1)$

$\supset$ Mq si $X \in B(0;1)$ alors $X \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$

$X \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) \iff \forall f \in E^*, f(X) \leq \sup_{Y \in O_n(\mathbb{R})} f(Y)$

$\iff \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(XM) \leq \sup_{Y \in O_n(\mathbb{R})} \mathrm{tr}(YM)$.

On a $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ tq $M = US$

$U^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\sup_{Y \in O_n(\mathbb{R})}(\mathrm{tr}(YM)) \geq \mathrm{tr}(U^{-1}M)$
$\geq \mathrm{tr}\, S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

où $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ vp de S.

$\mathrm{tr}(XM) = \sum_{i=1}^{n} \langle XMe_i | e_i \rangle$ (e_i bon adaptée à S)

$= \sum_{i=1}^{n} \langle Me_i | X^T e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle U\lambda_i e_i | X^T e_i \rangle$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \|U\lambda_i e_i\| \times \|X^T\| \|e_i\|$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

donc $\mathrm{tr}(XM) \leq \sup_{Y \in O_n(\mathbb{R})} \mathrm{tr}(YM)$

Outils : A compact $\Rightarrow \mathrm{Conv}(A)$ compact (dim n)

Soit $\varphi : A^{n+1} \times C \longrightarrow \mathrm{Conv}(A)$

$(a_i, \dots, \lambda_1 \dots \lambda_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$

où $C = \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \;\middle|\; x_i \in [0;1], \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$

C est fermé borné donc compact donc $A^{n+1} \times C$ compact
donc φ étant bien définie et surjective par Carathéodory
$\mathrm{Conv}(A)$ est l'image continue d'un compact, qui est compact.