Anaël Marit ENS Rennes

# ÉCHANTILLONNAGE DE SHANNON

**- 201, 208, 213, 234, 250 –**

—

L'intégralité du développement est extrait de [1], chapitre III, section 2.21. Attention il y a des erreurs dans la preuve du livre !

On va étudier ici les propriétés des fonctions $L^2$ dont la transformée de Fourier est à support astreint à un compact. On pose :

$$BL^2 := \{f \in L^2 \mid \mathcal{F}[f](1 - \mathbb{1}_{[-1,1]}) = 0\}^{\text{(i)}} \tag{1}$$

## Etude de l'espace $BL^2$

On va montrer ici un certain nombre de propriétés de l'espace $BL^2$.

**Lemme 1.** *Toute fonction de $BL^2$ admet un représentant continu qui tend vers 0 à l'infini. On a par ailleurs une constante réelle $C$ (ii) telle que :*

$$\forall f \in BL^2,\ ||f||_\infty \leqslant C||f||_2 \tag{2}$$

*Démonstration.* Commençons par remarquer que $\mathcal{F}$ envoie $L^2$ sur $L^2$. Ainsi, pour $f \in BL^2$, $\mathcal{F}[f]$ est une fonction $L^2$ à support contenu dans $[-1, 1]$. Comme cet intervalle est de mesure fini, $\mathcal{F}[f]$ est donc également $L^1$ sur $[-1, 1]$ et il existe une constante $C$ telle que $\|\mathcal{F}[f]\|_1 \leqslant C\|\mathcal{F}[f]_2$, constante ne dépendant pas de $\mathcal{F}$. Par ailleurs, la formule d'inversion de Fourier donne :

$$f = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\mathcal{F}[\check{f}]] \tag{3}$$

avec $\check{f} : x \mapsto f(-x)$. Donc $f$ s'écrit comme la transformée de Fourier d'une fonction $L^1$ : elle est représentée par une fonction continue. De plus, comme la transformée de Fourier de $L^1$ dans $L^\infty$ est continue de norme 1, il vient :

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}[f]\|_1 \leqslant \frac{C}{2\pi}\|\mathcal{F}[f]\|_2 = C\|f\|_2 \tag{4}$$

où la dernière égalité vient de la formule de Plancherel. □

Dans toute la suite, ce lemme nous permettra d'identifier les fonctions de $BL^2$ avec leurs représentants continus.

(i). J'ai pris quelques pincettes pour écrire proprement l'intuition qui est que $\mathcal{F}[f]$ est nulle presque partout en-dehors de $[-1, 1]$ car rigoureusement, l'évaluation d'un élément de $L^2$ n'a pas de sens (on peut aussi s'en sortir en choisissant un représentant).

(ii). On peut calculer explicitement sa valeur via l'inégalité de Jensen, mais ça n'est pas nécessaire pour le développement.

**Proposition 2.** *$BL^2$ est un sous-espace de Hilbert de $L^2$.*

*Démonstration.* $BL^2$ est clairement un sous-espace vectoriel de $L^2$. Il suffit donc de prouver que c'est un sous-espace fermé. Soit $(f_n) \in (BL^2)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant au sens $L^2$ vers une certaine fonction $f \in L^2$. Par continuité de la transformée de Fourier, on a :

$$(1 - \mathbb{1}_{[-1,1]})\mathcal{F}[f_n] \xrightarrow[n\to+\infty]{(L^2)} (1 - \mathbb{1}_{[-1,1]})\mathcal{F}[f] \tag{5}$$

Or le terme de gauche est constant égal à 0. Donc $(1 - \mathbb{1}_{[-1,1]})\mathcal{F}[f] = 0$, c'est-à-dire $f \in BL^2$ et $BL^2$ est un fermé de $L^2$. □

On va maintenant calculer une base hilbertienne de $BL^2$.

**Définition 3 (Sinus cardinal).** *On définit la fonction* sinus cardinal *comme :*

$$\begin{aligned} \operatorname{sinc} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Le sinus cardinal va nous fournir une base hilbertienne de $BL^2$ :

**Théorème 4.** *La famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\tau_{n\pi} \operatorname{sinc}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $BL^2$, où $\tau_x$ est l'opérateur de translation par $x$.*

*Démonstration.* On commence par calculer la transformée de Fourier de la fonction porte :

$$\mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-1,1]}](\xi) = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\right]_{x=-1}^{x=1} \tag{7}$$

$$= 2\operatorname{sinc}(\xi) \tag{8}$$

Ainsi, comme la transformée de Fourier transforme les facteurs exponentiels en translations :

$$\mathcal{F}\left[x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{in\pi x}\mathbb{1}_{[-1,1]}\right](\xi) = \tau_{n\pi}\operatorname{sinc}(\xi) \tag{9}$$

On calcule donc à l'aide de la formule de Plancherel pour $k$ et $l$ des entiers :

$$2\pi\langle\tau_{n\pi}\operatorname{sinc}, \tau_{k\pi}\operatorname{sinc}\rangle = \frac{(2\pi)^2}{4}\langle x \mapsto \mathrm{e}^{in\pi}\mathbb{1}_{[-1,1]}, x \mapsto \mathrm{e}^{ik\pi x}\mathbb{1}_{[-1,1]}\rangle \tag{10}$$

$$= \pi^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{i(n-k)\pi x}\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

$$= 2\pi^2\delta_{k,m} \tag{12}$$

Donc cette famille est orthogonale. Il suffit de la renormaliser pour obtenir le résultat souhaité. □

## Théorème d'échantillonnage de Shannon

Maintenant que l'espace $BL^2$ est bien compris, le théorème d'échantillonnage va tomber presque comme une évidence :

**Théorème 5 (Echantillonnage de Shannon).** *L'application :*

$$\begin{aligned} BL^2 &\to l^2(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (f(n\pi))_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

*est une isométrie. De plus, on peut reconstruire $f$ à partir de son échantillonnage :*

$$\forall f \in BL^2,\ f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\pi)\, \tau_{n\pi} \operatorname{sinc} \tag{13}$$

*où cette série converge au sens $L^2$ et uniformément.*

*Démonstration.* De manière générale, si $H$ est un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, l'application $H \ni f \mapsto (\langle e_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ est isométrique et $f$ est donnée comme la somme de la série $\sum \langle e_n, f\rangle e_n$ où la convergence est au sens $L^2$. On applique ce résultat à l'espace $BL^2$ muni de sa base hilbertienne composée des translatés du sinus cardinal. Grâce au lemme 1, la convergence $L^2$ implique la convergence $L^\infty$, c'est-à-dire la convergence uniforme. Enfin, remarquons que le sinus cardinal s'annule sur les points de la forme $n\pi$ où $n$ est un entier non nul. Ainsi, par convergence uniforme, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \tau_{n\pi} \operatorname{sinc}, f\rangle \tau_{n\pi} \operatorname{sinc}(x) \tag{14}$$

et donc en évaluant cette égalité pour $x = n\pi$, on obtient exactement :

$$\langle \tau_{n\pi} \operatorname{sinc}, f\rangle = f(n\pi) \tag{15}$$

et le résultat s'en suit immédiatement. □

*D'un point de vue physique, ce résultat dit que si on cherche à acquérir un signal dont le spectre est borné, il suffit pour connaître entièrement le signal de l'échantillonner sur des valeurs de temps discrètes, pour peu qu'on acquiert des valeurs suffisamment souvent. C'est un résultat fondamental en théorie de l'information, qu'on apprend notamment (mais sans démonstration !) en deuxième année de prépa.*

## Références

[1] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses.